1750

Meditationes in quaestionem observationibus temporis momentum determinandi

Leonhard Euler

MEDITATIONES IN QUÆSTIONEM

AB ILLUSTRISSIMA ACADEMIA REGIA PARIS. SCIENTIARUM,

Pro anno 1747. cum Præmio duplicato PROPOSITAM,

Quibusnam observationibus mari, tam interdiu quàm noctu, itemque durante crepusculo verum temporis momentum commodissimè & certissimè determinari queat?

Arbor non uno sternitur ictu.

I.

EXPLICATIO INSTITUTI.

§. 1. QUAMVIS accurata hujus quæstionis solutio non parùm ad inventionem longitudinis conferre videatur, quoniam ex discrimine temporum in diversis locis simul observatorum differentia inter eorum longitudines aptissimè concluditur; tamen hæc quæstio, etiam remoto hoc summo perfectionis gradu, in

MEDITATIONES

omni navigatione non ſolùm eſt utiliſſima, ſed etiam maximè neceſſaria, nihil enim in navi ſuſcipitur, quod quidem ad ejus curſum pertineat, quin plurimùm interſit verum temporis momentum noſſe, quo id factum ſit. Verùm ſuperfluum foret hìc dignitatem & utilitatem iſtius quæſtionis collaudare velle, cùm ipſa Academia Regia, repetitâ ejus propoſitione, ſimul ſummum ejus uſum declaret.

§. 2. Cùm tempus à meridie cujuſque diei, vel à media nocte menſurari ac numerari ſoleat, patet in navi quando temporis momentum quæritur, numerum horarum ac minutorum deſiderari, quæ vel à meridie vel à media nocte ejus loci, ubi navis tunc verſatur, ſint elapſa. Cùm enim Academia tempus non per horologia definire jubeat, ſed per ſolas obſervationes, perſpicuum eſt non requiri menſuram durationis à quopiam temporis momento cognito; ſed verum tempus Aſtronomicum quod obſervationes pro eo loco & tempore exhibeant; vel quod horologium ſolare, ſiquidem in uſum adhiberi poſſet, eſſet indicaturum.

§. 3. Si quidem navis vel quieſceret, vel ſub eodem meridiano progrederetur, non aliud intercederet diſcrimen inter menſuram temporis reverâ præterlapſi & temporis Aſtronomici, niſi quòd ex æquatione temporis naſceretur. Sin autem navis continuò ſecundùm longitudinem promoveatur, manifeſtum eſt, hos duos temporis menſurandi modos, inter ſe plurimùm diſcrepare poſſe. Sin enim fieri poſſet, ut navis 24 horarum totum terræ ambitum conficeret, ſolemque conſtanter in meridiano conſtitutum aſpiceret; Aſtronomicè tempus menſurando perpetuus deprehenderetur meridies, quotcumque etiam horæ præterlabantur.

§. 4. Triplicem igitur in navigatione temporis menſuram conſtitui oportet, quarum prima in æquabili temporis defluxu conſiſtit, ſecundùm quam, verbi gratiâ, horæ

quæ à moment
momentum da
cundus tempus
quo hora petitu
eo momento, c
ſervatus, effluxe
longitudinem m
modus, dinume
meridies ſub eo
ſunt præterlapſæ
§. 5. Trium h
mus quamquam
hic tamen non a
gia requirit, neq
tui poteſt, ſi quic
Interim tamen v
cundum vel terti
intervallum conſ
interea proceſſeri
tudinum reſpond
demtum, dabit v
§. 6. Hìc igitu
temporis aſſignan
dem duo modi pl
bunt, niſi forte n
ubi brevi tempori
fieri poteſt. Præte
verſi, tamen non
que inſtar unius co
neris à nave conſe
quantum navis ali
dinem vel latitudi
re aſſignari queat.

quæ à momento, quo navis è portu est egressa ad quodvis momentum datum reverâ sint elapsæ, numerantur. Secundus tempus mensurandi modus ad meridiem ejus diei, quo hora petitur, spectat; eoque quæritur quot horæ ab eo momento, quo meridies proximè præcedens fuit observatus, effluxerint: etiamsi interea navis situm secundùm longitudinem mutaverit. Tertius autem tempus metiendi modus, dinumerat horas, quæ ab eo momento, in quod meridies sub eo meridiano, ubi navis jam versatur, incidit, sunt præterlapsæ.

§. 5. Trium horum tempus describendi modorum, primus quamquam solus, veram temporis notionem præbet, hic tamen non attenditur, quoniam exquisitissima horologia requirit, neque per solas Observationes cœlestes institui potest, si quidem observationes eclipsium excipiamus. Interim tamen vera temporis duratio ex tempore per secundum vel tertium modum definito concludi potest. Si intervallum constet, quo navis secundùm longitudinem interea processerit. Tempus enim quod differentiæ longitudinum respondet, tempori observato vel additum vel demtum, dabit verum temporis intervallum.

§. 6. Hîc igitur mihi tantùm ad secundum ac tertium temporis assignandi modum erit respiciendum: qui quidem duo modi plerumque parùm à se invicem discrepabunt, nisi forte navis propè alterutrum polum versetur, ubi brevi temporis spatio satis magna longitudinis mutatio fieri potest. Præter hunc casum bini isti modi, etsi sunt diversi, tamen non difficulter alter ad alterum reduci, sicque instar unius considerari poterunt. Æstimatio enim itineris à nave confecti, jam eò usque perfecta videtur, ut quantum navis aliquot saltem horarum spatio vel longitudinem vel latitudinem immutaverit sine perceptibili errore assignari queat.

§. 7. Obſervationes autem per ſe tempus tertio tantùm modo oſtendunt, in quovis enim loco, ubicumque navis conſtiterit: aſpectus cœli perpetuò eam horam deſignat, quæ à meridie ejuſdem loci numeratur. Quando ergo navis ab eo tempore quo verus meridies fuit obſervatus, ad aliam longitudinem pervenerit, tum tempus differentiæ longitudinum debitum tempori tertio modo aſſignata addi vel demi debet, ut obtineatur menſura temporis ſecundo modo deſcripti. Facilè autem perſpicitur, etiamſi in æſtimatione differentiæ longitudinum haud levis error fuerit commiſſus, tamen hinc temporis determinationem non ſenſibiliter perturbari.

§. 8. Quæſtione ergo ad determinationem temporis tertio modo ſumti perductâ, definiendum eſt, cujuſmodi obſervationibus, ad hoc præſtandum, uti conveniat. Atque hic quidem ſtatim pleraque obſervationum genera, quæ in continenti inſtitui ſolent, hinc excludi debent. In mari enim neque tranſitus aſtri per meridianum, neque per datum verticalem obſervari poteſt, neque eas obſervationes inſtituere licet quæ exactiſſimum horologium requirunt. Relinquuntur ergo potiſſimùm ſolæ obſervationes altitudinum, quibus proinde in hoc negotio tantùm utar.

§. 9. Hîc igitur aſſumo ejuſmodi jam inventa eſſe inſtrumenta, quibus tam ſolis altitudo interdiu, quàm ſtellarum altitudines noctu ſatis accuratè obſervari queant. Cùm enim hæc ipſa quæſtio jam ſit ab illuſtr. Academia propoſita, atque hac occaſione plura eximia inſtrumenta altitudinibus obſervandis apta ſint excogitata, temerarium videri poſſit hoc negotium denuò ſuſcipere. Interim tamen ne ullam officii partem deſeruiſſe videar, quædam inſtrumenta hîc deſcribam, quæ forte ad præſens inſtitutum optato ſucceſſu haud carebunt.

§. 10. Quoniam dènique non eo ſolùm momento, quo

obſervatio inſtitui
præcipuè ut temp
tia, modò interva
emendentur; ne
ſpatia ſatis exactè
rum vel horologi
mùm inventorum
fieri poſſe hîc aſſi
evolvendo elabor

§. 11. Navem
tam eſſe pono, qu
intervalla accura
liceat: tum verò
exiguis temporis i
quàm latitudinis ſ
pro majoribus tem
non poſſe conced
variatio longitudi
tò accuratiùs ex
quàm ex obſerva
his in majoribus d

§. 12. His igi
monſtrabo, quem
deris altitudo ido
debeat: quod argu
pertractatum, bre
tantùm deſcriptio
rum, quæ forte in
dabo. Deinde plu
altitudinum veram
negotium cùm pa
quæſtioni illuſtriſſi
rum confido, ſi ſele

observatio instituitur, temporis assignatio desideratur, sed præcipuè ut tempora tam antecedentia quàm consequentia, modò intervallum non sit nimis magnum, hoc modo emendentur; necesse est, ut hujusmodi brevia temporis spatia satis exactè mensurari queant; quod vel clepsydrarum vel horologiorum portatilium vel aliorum nuper demùm inventorum instrumentorum beneficio, satis exactè fieri posse hîc assumo, neque in hoc argumento ampliùs evolvendo elaborabo.

§. 11. Navem igitur jam ejusmodi instrumentis instructam esse pono, quibus saltem non nimis magna temporis intervalla accuratè secundùm horas & minuta demetiri liceat: tum verò pariter pono, ex cursu navis pariter pro exiguis temporis intervallis, variationem tam longitudinis quàm latitudinis satis exactè assignari posse; etiamsi hoc pro majoribus temporis intervallis sine enormi errore fieri non posse concedam, similiter scilicet modo, quo in terra variatio longitudinis ac latitudinis in parvis distantiis multò accuratiùs ex itineris æstimatione concludi potest, quàm ex observationibus astronomicis, cùm tamen sine his in majoribus distantiis nihil certi cognosci queat.

§. 12. His igitur circumstantiis perpensis, primùm monstrabo, quemadmodùm quovis tempore cujusque sideris altitudo idoneorum instrumentorum ope observari debeat: quod argumentum cùm jam sit uberrimè ab aliis pertractatum, brevitati maximè studebo, atque imprimis tantùm descriptioni quorundam novorum instrumentorum, quæ forte in mari utilitate non carebunt, operam dabo. Deinde plures modos describam ex observatione altitudinum veram diei noctisve horam colligendi; quod negotium cùm pariter ab aliis ferè exhaustum videatur, quæstioni illustrissimæ Academiæ me pleniùs satisfacturum confido, si selectum ejusmodi observationum, quibus quàm minimo errore ſcopus obtineatur, indicavero, ſimulque quando aliquot obſervationibus ſucceſſivè inſtituendis utar, oſtendero, quomodò variationis, quam navis interea tam in longitudine quàm in latitudine ſubiit, ratio in calculo ſit habenda. Cùm enim hæc mutabilitas propria ſit obſervatorum in mari fluctuantium illuſtr. Academiam ad hanc potiſſimùm circumſtantiam reſpexiſſe, mihi quidem videtur.

II.

De Obſervatione Altitudinum.

§. 13. CUM illuſtriſſima Academia expreſſis verbis trium temporum diei, crepuſculi, ac noctis mentionem faciat, ab obſervationibus interdiu inſtituendis initium faciam: quæ ab obſervationibus nocturnis hoc præcipuè diſcrepant, quod in illis horizon ſit conſpicuus, in his verò non item, ex quo fonte quoque diſcrimen inter obſervationes, durante crepuſculo & noctu factas me rectè petere arbitror, cùm in crepuſculo conſpectus horizontis, etiam nunc in obſervationibus adhiberi queat: præterquam quòd pauciſſima aſtra in crepuſculis appareant.

§. 14. Die autem præter ſolem nullum aliud ſidus ſe oculis noſtris offert, ex cujus obſervatione horam diei definire queamus, & hanc ob rem omnes obſervationes diurnas ad ſolum ſolem reſtringam, qui nobis etiam certiſſimam ac facillimam viam temporis dignoſcendi ſuggerit. Etiamſi enim, quando Luna interdiu ſuper horizonte cernitur, tamen ob curſum ejus nondum ſatis exactè cognitum, tum verò ob ejus parallaxin maximè incertam, ejus

ur, indicavero, ſi-
bus ſucceſſivè inſti-
ariationis, quam na-
in latitudine ſubiit,
nim hæc mutabilitas
nantium illuſtr. Aca-
ſtantiam reſpexiſſe,

itudinum.

emia expreſſis verbis
repuſculi, ac noctis
us interdiu inſtituen-
onibus nocturnis hoc
izon ſit conſpicuus,
e quoque diſcrimen
culo & noctu factas
epuſculo conſpectus
ibus adhiberi queat:
in crepuſculis appa-

ullum aliud ſidus ſe
tione horam diei de-
s obſervationes diur-
nobis etiam certiſſi-
ignoſcendi ſuggerit.
ſuper horizonte cer-
ſatis exactè cogni-
ximè incertam, ejus

obſervationes ad tempus cognoſcendum adhibere nolim.

§. 15. Solis autem altitudines commodiſſimè Quadrante Anglico obſervari videntur, tum quòd nautæ huic inſtrumento jam ſatis ſint aſſueti, tum quia non opus eſt, ut collimatio versùs ipſum ſolem fiat, ſed ad ejus imaginem per foraminulum projectam reſpicitur, cum qua obſervatione directio inſtrumenti horizontem versùs non difficulter conjungitur. Neque tamen refragabor, ſi aliud inſtrumentum, vel eorum, quæ jam ſunt propoſita, vel etiam eorum quæ ipſe deſcribam, ad ſolis altitudines obſervandas magis aptum videatur, quin id in locum Quadrantis Anglici ſubſtituatur.

§. 16. Si tali inſtrumento altitudo centri ſolis intra unum minutum primum certa haberi poſſet eam non ſolùm per refractiones, ſed etiam per parallaxin corrigi neceſſe foret, ſed quia in mari hujuſmodi accuratio vix ſperari poteſt, præclarumque nobiſcum agitur, ſi in altitudine ſolis non ultra 5 minuta erremus, parallaxin tutò negligere & refractiones quoque, niſi ſol propè horizontem verſetur, prætermittere licebit: ſcilicet, quamdiu refractio infra unum duove minuta prima ſubſiſtit, ſufficiet nimirùm in tabulis refractionum minuta ſecunda penitùs omitti, ne calculus deinceps inſtituendus præter neceſſitatem moleſtior reddatur, quod in obſervationibus ſtellarum æquè notatum velim.

§. 17. Soliſque ortus & occaſus quoties licuerit, diligenter obſervetur; ſic enim adhibitâ refractionum tabulâ, multò accuratiùs altitudo centri ſolis vel ſupra vel infra horizontem aſſignari poterit. Quin etiam hinc non difficulter momentum colligetur, quo altitudo centri ſolis reverâ fuerit nulla. Hæ verò obſervationes non ſolùm ſine ullis ferè inſtrumentis expediri poſſunt, ſed etiam adhiberi ſolent ad declinationem magnetis obſervandam, alioſque uſus nauticos; quamobrem eas eo minùs negligi conveniet.

§. 18. Durante crepuſculo Planetæ, potiſſimùm Venus & Jupiter, cum maximè lucidis ſtellis fixis viſui ſe offerunt. Quamquam autem hoc tempore horizontem adhuc conſpicere licet, tamen vereor ne uſus Quadrantis Anglici nimis evadat moleſtus & incertus. Cùm enim hoc caſu dioptris uti, eaque versùs ſtellam dirigere oporteat eodem momento, quo versùs horizontem collimatur; neque unus obſervator, niſi ſit exercitatiſſimus, ſtellaque propè horizontem hæreat, huic duplici collimationi par videtur, neque duo ſe mutuò adjuvare poterunt.

§. 19. Quoniam igitur ad obſervationes nocturnas alia inſtrumenta requiruntur, quæ ſine reſpectu ad horizontem habito, altitudines ſiderum indicent; iiſdem his inſtrumentis quoque in crepuſculo uti præſtabit, horizontiſque intuitum, ſolis obſervationibus ſolaribus reſervari, niſi forte alia inſtrumenta ad ſolem magis videantur accommodata. Remotâ itaque horizontis contemplatione, veniam peto, ut obſervationes crepuſculares & nocturnas in eandem claſſem mihi referre liceat.

§. 20. Pervenio itaque ad obſervationes nocturnas, quæ non ſolùm ob horizontis defectum alium obſervandi modum poſtulant, ſed etiamſi horizontem diſcernere liceret, tamen ſumma difficultas duplicem collimationem ſimul inſtituendi hunc modum inutilem redderet, cùm autem pendulorum uſus in mari penitùs ceſſet, æquilibrium fluidorum, ſi quidem ſatis ſit promtum, certiſſimè verum horizontis ſitum indicare videtur, ad quem deinceps ſiderum loca referuntur. At verò inſuper neceſſe eſt ut hæc relatio ſecundùm plana verticalia fiat, quamobrem quocumque inſtrumento utamur, id proximè in plano verticali ſuſtineri neceſſe eſt.

§. 21. Quocumque autem inſtrumento ad obſervandam ſtellæ cujuſdam altitudinem utamur, primò directio, in qua ſtella exiſtit, indagari debet, quæ vel dioptris vel Tubo Aſtronomico explorari ſolet. Etſi autem lentes cryſtallinæ objecta diſtinctiùs repreſentant, tamen earum uſus ſuper mari ferè nullus eſt, quia ob motum continuum, ſtellam quam forte per tubum conſpeximus, confeſtim amittimus, neque eam facilè recuperare valemus. Quin etiam in obſervationibus marinis ſtellas inſigniores adhiberi convenit, quarum loca in cœlo jam exactiſſimè ſint determinata, eas autem nudis oculis ſatis diſtinctè cernere licet, ut ob hanc cauſam tubis facilè carere queamus.

§. 22. Ad collimandum ergo inſtrumenta binis dioptris nudis inſtructa, reliquis quæ tubis ſunt munita, longè antecedunt, ac altera quidem dioptra exiguo foraminulo pertuſa ſit, per quod ſtella aſpiciatur. Altera verò dioptra ſatis amplam habeat aperturam, quo ſtella non facilè ex illa diſpareat, ſtatimque in eam reduci queat. Duo autem fila tenuiſſima in hac apertura firmata ſua interſectione ejus centrum deſignent, in qua ſi ſtella appareat, collimatio ritè ſit inſtituta.

§. 23. Eo ergo momento, quo ſtella in decuſſatione filorum iſtorum conſpicitur, inclinatio iſtius lineæ, quæ ab oculo ad ſtellam dirigitur ad rectam verticalem inveſtigari debet; quod ope quadrantis, cujus limbus accuratè in gradus & minuta ſit diviſus, commodiſſimè præſtatur. Si enim planum hujus quadrantis ſitum verticalem teneat, in eoque linea verticalis vel pendulo vel alio quoviſmodo indicetur angulus, quem linea directionis cum hac linea verticali efficit, diſtantiam ſtellæ à zenith metietur, ſi quidem recta dioptras jungens radio quadrantis, qui per diviſionis initium ducitur, fuerit parallela.

§. 24. Cùm enim ad hanc obſervationem duæ res requirantur, positio, scilicet, quadrantis in situ verticali, & in eo directio gravitatis naturalis, seu positio rectæ ad horizontem perpendicularis, quemadmodùm utraque obtineri queat, seorsim perpendam. Primò igitur assumam totum negotium in situ quadrantis verticali esse positum, lineamque verticalem nihil habere difficultatis. Quadrans autem, si liberè suspendatur, centrumque gravitatis in ipso suo plano situm habeat, sponte se ad situm verticalem componet, & oscillationes, quæ ipsi à motu navis inducuntur, moderatione ejus à quo tenetur, non difficulter, si non penitùs coercentur, tamen ad summam exiguitatem redigentur.

§. 25. Tametsi autem in hoc error quidam levis committitur, planumque quadrantis verticale putatur, cùm tamen aliquantisper declinet, error tamen qui inde in observationem altitudinis redundat, omninò erit imperceptibilis, neque respectu aliorum errorum, qui evitari nequeunt, in computum duci meretur. Interim tamen & hic error ex iis, quæ mox sum traditurus facilè tolletur, cùm, pluribus observationibus instituendis, ea sit verissima, quæ maximam stellæ distantiam à zenith ostendat. Demonstrabo enim, quò magis planum quadrantis à situ verticali declinet, eò minorem distantiam stellæ à zenith deprehendi debere.

§. 26. Ut igitur definiam, quantùm observatio altitudinis à declinatione plani quadrantis turbetur cujus perturbationis cognitio ad ejus emendationem maximi est

Fig. 1. momenti; considerabo primùm quadrantem ACB, in situ verticali, sitque AC recta ab oculo ad stellam directa, in quadrante autem sit CP, verticalis, erit angulus ACP, mensura vera distantiæ stellæ à zenith; ponamus hunc angulum $ACP = \varphi$, ut eum cum simili angulo, quem situs quadrantis inclinatus indicare reperietur, comparare queamus.

§. 27. Concipiamus nunc quadrantem circa rectam AC, quæ est fixa, aliquantulùm inclinari, atque in ACb pervenire, in quo cum verticali angulum faciat $BCb = \theta$. Quia jam in hoc plano ACb linea verticalis non datur, pendulum à gravitate in eo situm Cp eligere cogetur, qui à directione verticalis vera, minimè discrepet. Iste autem situs cognoscetur, si ex puncto P, in planum ACb normalis ducatur Po, tum enim perspicuum est rectam Cp per punctum hoc o transire debere; atque in hoc statu angulus ACp, distantiam stellæ à zenith indicare putabitur.

§. 28. Ad hunc igitur angulum ACp investigandum ex P ad AC quæ est communis utriusque plani interfectio, ducatur normalis PQ, ex eodemque puncto Q ad eandem AC in plano ACb educatur normalis Qo, in quam ex P, perpendiculariter ducta Po, simul in planum ACb erit normalis. Invento autem hoc puncto o, ex triangulo CQo, ad Q rectangulo, angulus quæsitus ACp, innotescet.

§. 29. Sit radius quadrantis $AC = BC = 1$, qui simul pro sinu toto habeatur, erit ob angulum $ACP = \varphi$, recta $PQ = \textit{sin.}\ \varphi$, & $CQ = \textit{cos.}\ \varphi$. Deinde angulus PQo, quia metitur inclinationem planorum ACB & ACb, erit $= \theta$, unde in triangulo QoP ad o rectangulo, fiet $Po = PQ\ \textit{sin.}\ \theta = \textit{sin.}\ \theta\ \textit{sin.}\ \varphi$, & $Qo = PQ\ \textit{cos.}\ \theta = \textit{cos.}\ \theta\ \textit{sin.}\ \varphi$. Cùm jam $\frac{Qo}{CQ}$ exprimat tangentem anguli ACp, erit $\textit{tang.}\ ACp = \frac{\textit{cos.}\ \theta\ \textit{sin.}\ \varphi}{\textit{cos.}\ \varphi} = \textit{cos.}\ \theta\ \textit{tang.}\ \varphi$, consequenter tangens ACP se habebit ad $\textit{tang.}\ ACp$, ut sinus totus ad cosinum anguli inclinationis utriusque plani.

§. 30. Hinc patet duobus casibus errorem seu discrimen inter angulos ACP & ACp fore nullum, quantumvis etiam fuerit inclinatio plani quadrantis magna. Si enim fit angulus $ACP = \varphi = 0$, quod fit fi ftella in zenith obfervetur, angulus ACp pariter erit $= 0$: atque fi fit angulus $ACP = 90°$, feu $tang.\,\varphi = \infty$, invenitur quoque $tang.\,ACp = \infty$, ideoque $ACp = 90°$, quare fi ftella in horizonte verfetur, inclinatio quadrantis pariter nullum errorem producit. Ex quibus jam liquet errorem fore majorem quo magis ftella tam à zenith quàm ab horizonte fimul fuerit remota.

§. 31. Cùm igitur angulus ACp minor fit angulo ACP, ponatur hîc angulus $ACp = \varphi - z$, ita ut z fit error ex inclinatione quadrantis oriundus, eritque $tang.\,(\varphi - z) = cof.\,\theta\; tang.\,\varphi$: at eft $tang.\,(\varphi - z) = \frac{tang.\,\varphi - tang.\,z}{1 + tang.\,\varphi\; tang.\,z}$. Unde reperietur $tang.\,z = \frac{(1 - cof.\,\theta)\; tang.\,\varphi}{1 + cof.\,\theta\; tang.\,\varphi^2}$. Si jam angulus inclinationis θ fit valdè parvus, affumere licet $cof.\,\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta\theta$. Eritque $tang.\,z = \frac{\theta\theta\; tang.\,\varphi}{2\,fec.\,\varphi^2 - \theta\theta\; tang.\,\varphi^2}$, feu ob $\theta\theta$ minimum, erit $tang.\,z = \frac{1}{2}\theta\theta\; fin.\,\varphi\; cof.\,\varphi = \frac{1}{4}\theta\theta\; fin.\,2\varphi$. Sicque error erit maximus quando $2\varphi = 90°$. Seu quando elevatio fideris fupra horizontem eft $45°$.

§. 32. Generaliter autem, quantacunque fit inclinatio θ, valor ipfius φ reperietur, cui maximus error refpondet, fi fractionis $\frac{(1 - cof.\,\theta)\; tang.\,\varphi}{1 + cof.\,\theta\; tang.\,\varphi^2}$, feu, ob θ conftans, hujus $\frac{tang.\,\varphi}{1 + cof.\,\theta\; tang.\,\varphi^2}$ differentiale, quod eft $= \frac{(1 - cof.\,\theta\; tang\,\varphi^2)\; d\; tang.\,\varphi}{(1 + cof.\,\theta\; tang.\,\varphi^2)^2}$ nihilo æquale ftatuatur, unde fit $tang.\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{cof.\,\theta}}$; errorque z maximus huic angulo $ACP = \varphi$ refpondens, definietur ex hac æquatione, $tang.\,z = \frac{(1 - cof.\,\theta) : \sqrt{cof.\,\theta}}{2} = \frac{1 - cof.\,\theta}{2\sqrt{cof.\,\theta}} = \frac{fin.\,\frac{1}{2}\theta^2}{\sqrt{cof.\,\theta}}$ ob $\frac{1 - cof.\,\theta}{2} = fin.\,\frac{1}{2}\,\theta^2$.

§. 33. Hinc ergo pro quavis quadrantis inclinatione maxima aberratio, quæ in obfervationem irrepere poteft, determinari poterit. Ponamus ergo planum quadrantis à plano verticali angulo 2° declinari, ita ut ſit $\theta = 2^\circ$ & $\frac{1}{2}\theta = 1^\circ$, reperietur $l\ tang.\ \varphi = 10.0001323$, & angulus $\varphi = 45^\circ\ 0'\ 31''$, & $l\ tang.\ z = 6.4438429$. Sicque error $z = 57''$, nequidem ad unum minutum primum exſurget. Quando autem quadrans inter oſcillandum longiùs à plano verticali digreditur, angulusque ACp, dum ſtella in interſectione filorum conſpicitur continuò mutatur, ita ut variatio percipi queat, tum maximus angulus, qui quidem deprehenditur, veram diſtantiam ſtellæ à zenith indicabit. Interim tamen apparet, niſi inclinatio ultra duos gradus aſcendat, ne hâc quidem præcautione opus eſſe, ſed altitudinem ſtellæ ſatis exactè indicari.

§. 34. His de ſitu quadrantis in ſitu verticali notatis, in id eſt incumbendum, ut in plano quadrantis ipſa linea verticalis exibeatur, quod in terra continenti quidem commodiſſime ope penduli præſtatur. Verum in mari uſum pendulorum prorsùs repudiare cogimur; eorumque loco ejuſmodi inſtrumenta adhiberi ſolent, quæ æquilibrio fluidorum innixa, verum horizontis planum exhibeant. Ex quo genere jam plura præclara extant inſtrumenta, alibi deſcripta, quæ ad meum uſum adhibere non dubitabo, ſi forte ea, quæ hîc ſum propoſiturus, minus apta videantur.

III.

Deſcriptio Quadrantis Nautici.

Fig. II. §. 35. CONFICIATUR primò quadrans *ACB* more ſolito ex metallo vel ligno duriſſimo, quod à varia tempeſtate non incurvetur; ubique autem materiam homogeneam adhiberi conveniet, ut à dilatatione & contractione quæ à mutato caloris gradu, accidit figura non diſtorqueatur. Limbus verò *AB*, ſit diligentiſſimè in gradus & quina vel dena minuta prima diviſus, quæ porrò per lineas diagonales in ſingula minuta ſubdividantur. Cujuſmodi diviſio pro magnitudine quadrantis vel magis vel minus diſtinctè exprimi poterit.

§. 36. Magnitudinem hujus quadrantis majorem non eſſe convenit, quàm ut ab uno homine commodè in manibus teneri ac tractari poſſit. Cùm igitur ſuſtentaculo non ſit opus, quo aliàs pondus valdè augetur, radius hujus quadrantis duos ferè pedes longum vel ſaltem ſeſquipedalem fieri licebit: quæ magnitudo jam diviſionis ſatis minutæ eſt capax, ita ut ſingula ferè minuta prima diſcerni queant; ſiquidem lineis tranſverſim ductis uti libeat. Infrà autem patebit, ne hâc quidem diviſione opus eſſe, ſed ſufficere ſi integri tantùm gradus exprimantur.

§. 37. Dioptræ *Aa* & *Cc* modò antè deſcriptæ ſuper radio *AC*, conſtituantur, earumque diſtantia bipedalis ſeu ſeſquipedalis ad collimandum ſatis erit idonea, ut quævis ſtella per eas non difficulter detegi, ſed etiam moderatione quadrantis in interſectionem filorum reduci poſſit, ſi forte pondus quadrantis obſervatori nimis grave videatur, quadrans ex centro *C*, ſuſpendi poterit, ita tamen ut manibus retineatur ac dirigatur; hoc enim modo Obſervator multùm ſublevabitur.

§. 38. Venio nunc ad præcipuam quadrantis partem, pendulum, ſcilicet, CGH, quod circa centrum C liberrimè mobile, in fiſſura GI habeat filum tenuiſſimum tenſum, quod in limbo quadrantis gradus & minuta diſtinctè indicet. Hoc igitur pendulum ſi perpetuò in ſitu verticali perſiſteret, ſtatim veram ſtellæ diſtantiam à zenith patefaceret: ſed in mari ob mutationem navis continuam, pendulum vix unquam in ſitu verticali acquieſcet.

§. 39. Marginem hujus penduli in m & n, non incongruum erit replicare, ut limbum quadrantis excipiat, ita tamen ut liberrimè juxta eum moveri poſſit, ſiquidem quadrans teneat ſitum verticalem. Hinc enim Obſervator ſtatim ſentiet utrùm quadrans in plano verticali verſetur, an notabiliter declinet, quo caſu non difficulter in ſitum verticalem proximè ſaltem dirigetur; quantùm quidem ad certitudinem obſervationum requiritur.

§. 40. Parti inferiori hujus penduli, ſeu regulæ mobilis CG, in G connectatur tubus vitreus EF, crenæ arcus lignei immiſſus, quæ modo mox indicando ſit diviſa. Tubus iſte vitreus autem aliquantulùm ſit incurvatus, & partibus utrinque æqualibus GE & GF cum regula ad angulos rectos firmiſſimè conjunctus, ſubſcudibus, ſcilicet, EH & FH, ut motum regulæ perfectiſſimè ſequatur, & cum ea unum continuum pendulum conſtituat.

§. 41. Tubus iſte vitreus aquâ ſeu alio liquore magis idoneo repleatur, relictâ exiguâ bullulâ aëreâ, & utrinque in E & F obſtruatur, ut aëri nullus aditus pateat. Hæc ergo bullula K, in omni tubi ſitu jugiter ſupremum occupabit locum, & tametſi ipſa per theoriam, motum quemdam oſcillatorium recipere debet, tamen effici poteſt, ut eum ferè ſingulis momentis amittat, motuque tubi non obſtante, nisi vehementer concutiatur, perpetuò in puncto tubi summo hæreat; qui effectûs, quemadmodùm promptissimè produci queat, deinceps exponam.

§. 42. Curvatura tubi hujus EF sit, quantùm fieri potest, circularis, referatque arcum circuli, cujus centrum situm sit alicubi in recta CGH, producta, puta in O; quod punctum quò longiùs distet, eò majores evadent gradus in arcu EF. Quare si radius GO decies major accipiatur quàm radius quadrantis AC, singula minuta prima curvaturæ tubi satis distinctè exprimi poterunt. Nihil autem obstat, quò minus tubo huic EF longitudo arcui quadrantis APB ferè æqualis tribuatur, unde curvatura tubi 9 gradus complectetur; ita ut uterque semissis GE & GF $4\frac{1}{2}$ gradus capiat, quæ amplitudo pro motu penduli oscillatorio sufficiens videtur.

§. 43. Cùm autem nimis sit difficile tubum vitreum EF, tam exactè juxta arcum circuli, cujus centrum sit in dato puncto O, incurvare, ad præsens institutum sufficiet, dummodo proximè ejusmodi habuerit figuram. Hinc oportebit divisionem hujus tubi non geometricè, sed practicè per observationes absolvere in loco, scilicet, quieto, antequam in navim conscendatur. Neque ergo formatio istius tubi, neque ejus divisio ullâ amplius premetur difficultate.

§. 44. Quòd si autem quadrans ACB, cum pendulo $CIGEHF$ modo exposito fuerit constructus, evidens est quemadmodùm ejus ope altitudo stellæ cujusvis cognosci queat. Dioptris enim Aa & Cc versùs stellam directis, eo momento quo stella in intersectione filorum apparet, notetur tam amplitudo arcûs AG, in limbo quadrantis, quem filum GI abscindit, quàm situs bullulæ aereæ K, & mensura arcûs GK in gradibus & minutis inventa, subtrahatur ab arcu AG, siquidem bullula in parte GE hæreat, si autem

---

ET 7

autem fuerit in arcu G
prodibit distantia stellæ
§. 45. Concipiatur eni
ut angulus ACP metiatu
bulla K in tubo locum
quoque verticalis, ide
GK indicat, æqualis e
gulus ACP, seu vera c
angulo ACG quem per
dit, subtrahatur angulus
§. 46. Quò autem h
dulum CG cochleâ mu
lum ad limbum quadra
torius penitùs coercer
chlea tum, quando pen
CP, dum stella in inte
tare æstimabitur: ut dei
bo EF respicere sufficia
§. 47. Vel cùm altit
gradus fuerit explorata
in divisione quadam in
indicetur. Quo facto m
bo EF inspiciat, ut sim
rit, se stellam in inters
bullæ exactè assignare
torum arcûs GK ab arc
tractus, vel ad eum ad
zenith. Hinc intelligit
tantùm in integros grad
sione facilè jam carere
§. 48. Ad has auten
das exercitio frequenti
cilè habitum compara
Prix. 1747.

autem fuerit in arcu GF, ad arcum AG addatur, ſicque prodibit diſtantia ſtellæ à zenith.

§. 45. Concipiatur enim ducta vera linea verticalis CP, ita ut angulus ACP metiatur diſtantiam ſtellæ à zenith: jam quia bulla K in tubo locum ſupremum occupat, erit recta OK quoque verticalis, ideòque angulus GOK, quem arcus GK indicat, æqualis erit angulo GCP. Quamobrem angulus ACP, ſeu vera diſtantia à zenith obtinebitur, ſi ab angulo ACG quem pendulum in limbo quadrantis abſcindit, ſubtrahatur angulus GOK quem ſitus bullæ indicat.

§. 46. Quò autem hæc faciliùs expediri queant, pendulum CG cochleâ munitum eſſe conveniet, quâ pendulum ad limbum quadrantis firmari, ejuſque motus oſcillatorius penitùs coerceri queat. Adigatur autem hæc cochlea tum, quando pendulum non multùm à ſitu verticali CP, dum ſtella in interſectione dioptræ conſpicitur, diſtare æſtimabitur: ut deinceps ad ſolum ſitum bullæ in tubo EF reſpicere ſufficiat.

§. 47. Vel cùm altitudo ſideris jam ad aliquot tantùm gradus fuerit explorata, pendulum ope cochleæ firmetur in diviſione quadam inſigniori limbi, quâ integer gradus indicetur. Quo facto miniſter adſtans ſedulò bullam in tubo EF inſpiciat, ut ſimul atque Obſervator ſignum dederit, ſe ſtellam in interſectione filorum contueri, locum bullæ exactè aſſignare poſſit. Tum enim numerus minutorum arcûs GK ab arcu AG jam antè cognito, vel ſubtractus, vel ad eum additus, præbebit diſtantiam ſtellæ à zenith. Hinc intelligitur ſufficere, ſi limbus quadrantis tantùm in integros gradus dividatur, atque ulteriori diviſione facilè jam carere poterimus.

§. 48. Ad has autem obſervationes accuratè inſtituendas exercitio frequenti opus erit; quo Obſervator ſibi facilè habitum comparabit quadrantem hunc, ſi modo idoneo fuerit ſuſpenſus; commodè tractandi, & quantùm fieri poteſt, ejus motus violentiores compeſcendi. Neque mihi quidem videtur ad hoc negotium tantùm ſolertiæ requiri, quantùm vulgò tractatio Quadrantis Anglici poſtulare ſolet.

§. 49. Quando enim Obſervator pendulum jam in ſitu CG, à verticali CP, non multùm remoto firmaverit, tum pendulum alio motu, niſi qui ſit ipſi quadranti communis concitari non poterit; hunc autem Obſervator obſequendo, ita temperare poterit, ut fiat lentiſſimus, præcipuè quando ſtellam in interſectione filorum conſpicit. Hocque modo ipſa bulla aërea non ſenſibiliter movebitur, atque famulus ſeu ſocius Obſervatoris non difficulter, momento imperato, locum bullæ dignoſcet.

§. 50. Non ſolùm autem hæc motûs penduli imminutio ideo eſt neceſſaria, quo locus bullæ certiùs notari queat, ſed etiam bulla eò accuratiùs ſe in locum tubi ſupremum recipit, multoque minus ultrò citròque vagabitur, quò tardior fuerit motus. Hiſque circumſtantiis probè perpenſis, non dubito quin ope hujus quadrantis, dummodò Obſervator ſibi modicam ſolertiam acquiſiverit, cujuſque ſtellæ vera altitudo tam accuratè obſervari poſſit, ut error vix ultra minutum exſurgat, & majorem quidem certitudinis gradum ſuper mari expectare non licet.

§. 51. Quamquam autem hoc modo incertitudo, quæ à motu bullæ oſcillatorio ejuſve ſegnitie proficiſcitur, quoad maximam partem tollitur, tamen ſtructura quoque tubi talis effici poteſt, ut bulla quàm promtiſſimè, ſitum ſupremum affectet, ibique perſeveret. Hoc, ſcilicet, præſtabitur, ſi tubus non nimis fiat anguſtus, bullæque modica quantitas relinquatur, quæ res ut ſint ad ſcopum maximè accommodatæ, cùm judicio, tum experientiâ à ſolerti artifice non difficulter definientur; quare deſcriptioni hujus inſtrumenti

quod mihi quidem pluri
palmam præripere videt

Deſcriptio alius

§. 52. NISI aliæ circ
longitudo pen
tum ipſi pendulo adjungi
Bernoullianum, ſcilicet,
curii in tubo anguſto K
enim mercurius in omni
lem teneat, dum pendulu
rius in tubo LK, recedet
loco mercurii S inclinatio

§. 53. Quia verò diffici
altitudinem Barometri cog
rii S, in tubo horizontali
penduli, ſed etiam à declin
niat, ac præterea iſtæ muta
ſatis ſint certæ, Barometror
ficienda penitùs rejiciendun
ideam ab æquilibrio tuboru
tam proponam; quæ tamen
parum præſtantior mihi qui

§. 54. Confecto, ſcilice
prà deſcripto, cum pendul
angulos rectos, tabula ſeu r
tubus recurvus $DEFH$, cu
plior quàm ramus FH, que
ut minimæ mutationi liquor

quod mihi quidem plurimis aliis ad hunc finem propositis, palmam præripere videtur, diutiùs non immoror.

I V.

Descriptio alius Quadrantis Nautici.

§. 52. NISI aliæ circumstantiæ impediant, quominus longitudo penduli tres pedes superare possit; tum ipsi pendulo adjungi posset barometrum *GIHKL* Bernoullianum, scilicet, quòd minimas mutationes mercurii in tubo angusto *KL*, satis distinctè indicet. Cùm enim mercurius in omni situ eandem altitudinem verticalem teneat, dum pendulum tantillùm inclinatur, mercurius in tubo *LK*, recedet notabiliter, unde vicissim ex loco mercurii *S* inclinatio penduli cognosci posset. *Fig. III.*

§. 53. Quia verò difficile foret quovis tempore veram altitudinem Barometri cognoscere, atque recessus mercurii *S*, in tubo horizontali *LK* non solùm ab inclinatione penduli, sed etiam à declinatione plani quadrantis proveniat, ac præterea istæ mutationes ob frictionem ne in terra satis sint certæ, Barometrorum usum ad pendula mari perficienda penitùs rejiciendum esse arbitror. Quocirca aliam ideam ab æquilibrio tuborum communicantium desumptam proponam; quæ tamen illâ, quam suprà descripsi, non parum præstantior mihi quidem videtur.

§. 54. Confecto, scilicet, quadrante *ACB*, modo suprà descripto, cum pendulo *CIG*, infra connectatur ad angulos rectos, tabula seu regula *EF* ad quam firmatus sit tubus recurvus *DEFH*, cujus ramus *DE*, multò sit amplior quàm ramus *FH*, quem gracillum esse convenit, ut minimæ mutationi liquoris in tubo *DE*, satis magna *Fig. IV.*

mutatio in tubo FH respondeat: tubus iste liquore quodam seu argento vivo impleatur, præstoque sit obturaculum, quo tubus DE obstrui possit, si reponatur ne liquor effluat.

§. 55. Ponamus liquorem, quando pendulum in situ verticali pendet, in m & o subsistere, ita ut recta mo tum sit horizontalis. Quando autem pendulum extra situm verticalem versatur, uti figurâ repræsentatur, in tubo ampliori DE liquor aliquantulùm ascendet, in angustiori verò subsidet in n, ut jam recta mn sit horizontalis. Mutatio in tubo ampliori hinc facta minima, & vix perceptibilis erit, cùm mutatio in angustiori, seu intervallum no satis sit notabile.

§. 56. Quoniam igitur recta mn, ad veram lineam verticalem CP est normalis, angulus omn, erit æqualis angulo GCP, seu declinationi penduli à situ verticali. Cùm itaque punctum o constet ex mutatione in tubo FH, seu intervallo no; cognosci poterit angulus omn, qui ab angulo ACG substractus, relinquet angulum ACP veram distantiæ stellæ à zenith mensuram. Tantùm igitur opus est, ut ad tubum FH divisio in gradibus & minutis adscribatur, quæ singulis punctis n respondeat, hocque aptissimè à perito artifice præstabitur.

§. 57. Si amplitudo tubi angustioris FH præ ampliori DE evanescat, ramusque FH ad basin EF fuerit perpendicularis, tum intervallum no erit tangens anguli omn, si sinus totus per mo exprimatur. Quare quò longior fuerit tubus EF, eò majora intervalla no iisdem angulis declinationum respondebunt; sin autem crus FH ad basin EF inclinetur, eò magis intervalla no augebuntur, sicque minimæ mutationes penduli à situ verticali satis sensibiliter exprimi poterunt.

§. 58. Ut autem liquor promtissimè se semper ad

æquilibrium componat,
tionem incertam reddat
ampliorem fieri conveni
fuerit hic tubus EF, e
que primo quasi momen

§. 59. Pendulo ergo
quadrantis non discrepa
cet, pendulo cochleâ,
moto, si summitas liquo
eo ipso momento, quo
spectat, cognoscetur in
CP à loco penduli GI:
notescet.

Determi

§. 60. PRIMUM i
poris veri, q
tempus medium colligi
merari solet, seu ab eo
meridianum loci, in q
mari meridianum digno
solis per meridianum fa
deret, neque ad hoc
esset.

§. 61. Cùm autem
verum meridiei mome
circa meridiem cujus t
mo, sæpissimè altitudo
consueto, vel alio qu

æquilibrium componat, neque motu oscillatorio observationem incertam reddat, tubi partem EF pariter multo ampliorem fieri conveniet tubo FH. Quò amplior enim fuerit hic tubus EF, eò celeriores erunt oscillationes atque primo quasi momento extinguentur.

§. 59. Pendulo ergo hac ratione instructo, usus hujus quadrantis non discrepabit à præcedente. Firmato, scilicet, pendulo cochleâ, in situ à verticali CP parùm remoto, si summitas liquoris n in tubo FH accuratè notetur eo ipso momento, quo observator stellam in intersectione spectat, cognoscetur inde distantia lineæ verticalis veræ CP à loco penduli GI: unde angulus quæsitus ACP innotescet.

V.

Determinatio Meridiei.

§. 60. PRIMUM igitur sol certissimus est index temporis veri, quo cognito, non difficulter inde tempus medium colligitur. Tempus autem à meridie numerari solet, seu ab eo momento quo solis centrum per meridianum loci, in quo versamur, transit: unde si in mari meridianum dignoscere liceret, observatio transitûs solis per meridianum facillimè momentum meridiei ostenderet, neque ad hoc ullà observatione altitudinis opus esset.

§. 61. Cùm autem linea meridiana minimè constet, verum meridiei momentum aliter definire nequit. Hinc circa meridiem cujus tempus saltem propè constare assumo, sæpissimè altitudo solis observetur, instrumento vel consueto, vel alio quod magis idoneum videbitur, quæ quamdiu crescit, tempus adhuc antemeridianum indicat, simul ac verò decrescere incipit, pomeridianum declarat.

§. 62. Eo ergo momento, quo solis altitudo crescere desinit, atque decrescere incipit, meridies evenisse censendus est. Verùm quia altitudo solis in ipso meridie per notabile temporis intervallum insensibiliter mutatur, atque adhibitis etiam optimis instrumentis in observatione altitudinis error unius minuti committi potest, hoc modo nimis incertè momentum meridiei assignaretur. Interim tamen hæc observatio maximæ solis altitudinis non est intermittenda, cùm ex ea, ob declinationem solis cognitam, elevatio poli determinetur, cujus cognitio non solùm in universa navigatione maximi est momenti, sed etiam ad ipsam horam cognoscendam magnum adjumentum affert.

§. 63. Ad tempus ergo meridiei exactiùs definiendum præstabit duabus solis altitudinibus æqualibus uti, quarum altera ante, altera post meridiem sit facta, tum autem momentum medium inter has duas observationes meridiem indicabit sub his conditionibus; si primò solis declinatio non fuerit interea immutata; secundò si ipsa navis interea quieverit, ac tertiò si observationes nullis erroribus sint inquinatæ.

§. 64. Ante omnia igitur necesse est, ut hoc ipsum intervallum temporis, inter binas observationes elapsi exactè metiri valeamus, quod nisi id plures horas superet, fieri posse inter postulata est relatum. Nisi enim tempus per aliquod saltem intervallum ope clepsydræ seu automati exactè mensurari posset, tum ipsa temporis determinatio per observationes omninò esset inutilis, quia non tam determinatio unici cujusdam momenti, sed emendatio notabilis cujuspiam temporis intervalli desideratur.

§. 65. Quod jam ad tres antè memoratas circumstantias attinet, ad quas attendi oportet, ſi meridiem ex duabus altitudinibus ſolis æqualibus determinare velimus; earum prima, quæ variatione ſolis declinationis continetur, jam ſatis eſt explorata, cùm habeantur tabulæ æquationis meridiei ad ſingulos gradus elevationis poli ſupputatæ, quibus differentia veri meridiei & momenti inter obſervationes medii indicatur. Quando autem intervallum obſervationum non quatuor horas ſuperat, quod aliæ quoque rationes prohibent, ne hac quidem correctione opus erit, cùm multo minor ſit, quàm errores qui in obſervationibus evitari nequaquam poſſunt.

§. 66. Altera difficultas, quæ à motu navis oritur, quæſtioni propoſitæ penitùs eſt propria; ad quam igitur removendam eò majorem operam adhibebo, quòd reliqua hujuſmodi obſervationum momenta in omnibus ferè elementis tradi ſolent, hæc verò obſervationum perturbatio à motu navis oriunda nuſquam ſatis diligenter explicata reperiatur. Quamquam autem accuratam itineris à nave confecti cognitionem inter poſtulata referre non licet, tamen quantùm navis intervallo aliquot horarum proceſſerit, ſatis exactè æſtimari poſſe, quantùm quidem ad horæ determinationem opus eſt, jure aſſumo.

§. 67. Ex æſtimatione igitur itineris, quod navis intervallo duarum illarum obſervationum, quibus eadem ſolis altitudo apparuit, ſatis accuratè colligi poteſt, quantùm tam longitudo, quàm latitudo navis interea fuerit mutata. Si enim noverimus quot milliaria anglica vel boream vel auſtrum versùs abſolverit, poli elevatio totidem minutis primis vel major vel minor evaſit, in hoc enim negotio mentem tutò, à ſphæroidica terræ figura abſtrahimus, quoniam minutiarum omiſſio, horæ determinationem non turbat.

§. 68. Deinde æquè facilè ex itinere æſtimatio judicatur, quantùm navis vel ortum vel occasum versum secundùm circulum æquatori parallelum interea sit progressa. Ut autem hinc variatio longitudinis in minutis definiri possit, elevationem poli nosse oportet, cujus autem cognitio satis crassa ad hoc institutum sufficit. Si enim vel aliquot gradibus in elevatione poli erraverimus, tamen error qui inde in æstimationem variationis longitudinis redundat, omninò erit imperceptibilis.

§. 69. Quamquam autem navis plerumque in hoc intervallo tam longitudinem quàm latitudinem simul immutat, tamen utramque mutationem hìc seorsim perpendam. Si enim ostendero, quomodo conclusio ex observationibus respondentibus deducenda tam ratione longitudinis quàm latitudinis mutatæ corrigi debeat singulatim; his ambabus correctionibus simul uti oportebit quando navis interea tam longitudinem quàm latitudinem mutaverit. Interea autem declinationem solis invariatam considero; quia error inde oriundus jam est definitus.

§. 70. Ponamus ergo intervallo duarum illarum observationum solis, solam navis longitudinem esse mutatam dato minutorum numero, latitudinem verò eandem mansisse. Sit in sphæra cœlesti P polus, & S locus solis immobilis, ita ut terra, quæ in centro hujus sphæræ posita concipiatur, ejus respectu circa axem spatio 24 horarum solarium giretur. Sit A zenith loci navis tempore primæ observationis, B verò zenith navis momento alterius observationis. Quia ergo in utroque situ tam eadem à polo distantia servatur, quàm utrinque eadem solis à zenith distantia observatur, erit $AP=BP$, & $AS=BS$.

Fig. V.

§. 71. Hinc meridianus PS, angulum horarium APB bisecabit, unde sequitur tempore inter observationes medio, meridiem fuisse sub meridiano PCS; eo autem tempore navim sub ipso meridiano in C extitisse, siquidem interea

ET ...

interea motu uniformi ...
mota, perspicuum es...
vationes medio merid...
ubi tum navis est versa...
viam AB descripserit ...
terræ communi, & ut ...
est navim tempore me...

§. 72. Quò distinct...
ciare possimus, ponar...
in A & B, elapsas ess...
ab occidente in orien...
visse unum gradum. C...
cendum est ante bihor...
ridiano PB, sub quo n...
PC, per quem navis a...

§. 73. Quia ergo n...
gradum secundùm lon...
in tempore duo minut...
navis nunc reperitur, ...
meridies duobus minu...
eveniret, ita ut hoc n...
hora statuenda sit 2^h 2...
primæ observationis, ...
dicare debuerunt 9^h 5...

§. 74. Ex his ergo ...
tervallo duarum obse...
nis interea absolutâ, ...
rologia solaria indica...
definiri debeat. Atqu...
ante quàm post observ...
laribus animadversus, ...
laria emendari poteru...
mis, quam navis conti...

Prix. 1747.

interea motu uniformi fuerit secundùm longitudinem promota, perspicuum est. Unde momento inter duas observationes medio meridies verus incidit sub ipso meridiano, ubi tum navis est versata. Cùm enim navis zenith interea viam AB descripserit cum motu proprio, tum motu toti terræ communi, & uterque motus sit uniformis, necesse est navim tempore medio in ipso puncto C hæsisse.

§. 72. Quò distinctiùs, quæ hinc consequuntur, enunciare possimus, ponamus inter momenta observationum in A & B, elapsas esse quatuor horas, navemque interea ab occidente in orientem secundùm longitudinem absolvisse unum gradum. Quando igitur navis in B versatur, dicendum est ante bihorium meridiem incidisse, non sub meridiano PB, sub quo navis nunc est, sed sub meridiano PC, per quem navis ante duas horas transierit.

§. 73. Quia ergo navis intra hoc bihorium dimidium gradum secundùm longitudinem confecisse ponitur, quòd in tempore duo minuta prima, sub meridiano BP, in quo navis nunc reperitur, ut pote orientaliori, necesse est ut meridies duobus minutis primis citiùs, hoc est, ante $2^h\ 2'$ eveniret, ita ut hoc momento in loco navis B, vera diei hora statuenda sit $2^h\ 2'$. Simili modo, dum navis tempore primæ observationis, in A hæserat, horologia solaria indicare debuerunt $9^h\ 58'$ ante meridiem.

§. 74. Ex his ergo perspicuum est quomodo ex dato intervallo duarum observationum & variatione longitudinis interea absolutâ, tempus verum, quod, scilicet, horologia solaria indicarent, pro quovis loco navis medio definiri debeat. Atque si æquabilis temporis lapsus tam ante quàm post observationes, fuerit in solis & minutis solaribus animadversus, etiam ea tempora ad horologia solaria emendari poterunt; siquidem mutationis longitudinis, quam navis continuò subit, ratio habeatur.

§. 75. Cùm igitur hæc satis sint plana, atque bisectio temporis inter duas observationes elapsi, à variatione longitudinis non turbetur, videamus quantùm hoc negotium à mutatione latitudinis patiatur. Hìc quidem statim liquet, correctionem multò fore difficiliorem, quoniam difficilis est ei, quæ ex mutatione declinationis solis oritur, eaque multò major fieri potest, cùm navis latitudo intervallo aliquot horarum, quæ inter observationes effluxerunt, ultra gradum mutari queat. Quocirca hanc correctionem multò minus negligi conveniet.

§. 76. Quod quò facilius fieri possit, quæramus primùm in loco fixo ex data altitudine solis tempus à meridie. Sit, Fig. VI. scilicet, Z loci hujus zenith, P polus mundi, & S locus solis tempore observationis. Vocetur altitudo poli $= p$, cujus complementum est PZ, declinatio solis $= s$, cujus complementum $= PS$, siquidem declinatio solis fuerit ejusdem denominationis ac latitudo loci, sin minùs pro s, in calculo ponatur $-s$. Denique sit altitudo solis observata $= a$, cujus complementum erit arcus ZS; atque angulus ZPS, qui tempus à meridie indicat, sit $= X$, erit ex sphæricis, posito sinu toto $= 1$; $\cos. X = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$.

§. 77. Sit jam tempus inter binas observationes æqualium solis altitudinum interjectum, & ad arcum æquatoris reductum $= 2c$, altitudo solis in utraque observatione $= a$, & declinatio solis $= s$, quam pariter immutabilem assumo, quia error ex ejus variatione oriundus jam in tabulis æquationis meridiei indicatur. Sit elevatio poli tempore primæ observationis $= p$, ante meridiem, & elevatio poli tempore secundæ observationis post meridiem $= p + \pi$, ita ut navis interea per intervallum π propiùs ad polum accesserit.

§. 78. Jam quia navis sub eodem meridiano moveri

ET

ponitur & meridies n
$2c$ incidit, ponamus
prima observatione ad
pus à meridie ad alte
duas obtinebimus æqu

I. $\cos. (c +$

II. $\cos. (c -$

quæ eliminata altitudin
$\sin. p \tan g. s + \cos. p$
$+ \cos. (c + \pi) \cos. (c -$
§. 79. Cùm jam pa
parvæ, erit $\sin. (p + \pi$
$= \cos. p - \pi \sin. p$; atque
$(c - z) = \cos. c + z \sin$
erit $2 z \sin. c \cos. p = \pi \cos$
$z = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{\tan g. p}{\tan g. c} - \frac{\tan g.}{\sin.} \right.$
tatione π, angulus z f
pus conversus, indicab
lum observationum adc
mentum obtineatur. Ac
proximè saltem nosse o
commissus valorem ipsi
§. 80. Sit elevatio p
solis borealis 17° 30′, i
lum observationum sit 5
sum dat 80°, ita ut sit c
gro gradu propiùs ad p
& in tempore $\frac{1}{2} \pi = 2'$
tur.

ponitur & meridies non in medium momentum intervalli $2c$ incidit, ponamus arcum $c+z$ determinare tempus à prima observatione ad meridiem elapsum, erit $c-z$ tempus à meridie ad alteram observationem elapsum. Hinc duas obtinebimus æquationes:

$$\text{I. } \cos.(c+z)=\frac{\sin. a-\sin. p\,\sin. s}{\cos. p\,\cos. s}.$$

$$\text{II. } \cos.(c-z)=\frac{\sin. a-\sin.(p+\pi)\sin. s}{\cos.(p+\pi)\cos. s}.$$

quæ eliminata altitudine communi a dabunt:

$$Sin.\, p\, tang.\, s+\cos. p\,\cos.(c+z)=\sin.(p+\pi)\,tang.\, s+\cos.(c+\pi)\cos.(c-z).$$

§. 79. Cùm jam particulæ π & z præ p & c sint valdè parvæ, erit $\sin.(p+\pi)=\sin. p+\pi\cos. p$; $\cos.(p+\pi)=\cos. p-\pi\sin. p$; atque $\cos.(c+z)=\cos. c-z\sin. c$ & $\cos.(c-z)=\cos. c+z\sin. c$. Quibus valoribus substitutis, erit $2z\sin. c\cos. p=\pi\cos. c\sin. p-\pi\cos. p\, tang. s$. Hincque $z=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{tang.\, p}{tang.\, c}-\frac{tang.\, s}{\sin. c}\right)$ unde ex data latitudinis mutatione π, angulus z facilè determinatur, qui in tempus conversus, indicabit quantùm ad medium intervallum observationum addi debeat, ut verum meridiei momentum obtineatur. Ad hoc autem elevationem poli p, proximè saltem nosse oportet; quia exiguus error in ea commissus valorem ipsius z non sensibiliter afficit.

§. 80. Sit elevatio poli borealis $p=48°$, declinatio solis borealis $17° 30'$, ideoque $s=+17° 30'$, intervallum observationum sit $5^h 20'$, quod in angulum conversum dat $80°$, ita ut sit $c=40°$; navis autem intereà integro gradu propiùs ad polum accesserit, ut sit $\pi=1°$, & in tempore $\frac{1}{2}\pi=2'$. Jam calculus ita constituetur.

$$\begin{array}{ll} l.\,tang.\,p = 10{,}0455626 & l.\,tang.\,s = 9{,}4987223 \\ l.\,tang.\,c = 9{,}9238135 & l.\,sin.\ c = 9{,}8080675 \\ \hline 0{,}1217491 & 9{,}6906548 \end{array}$$

$$\frac{tang.\,p}{tang.\,c} = 1{,}323 \qquad \frac{tang.\,s}{sin.\ c} = \frac{0{,}490}{0{,}833}$$

$$\tfrac{1}{2}\pi = 2$$

$$z = 1',666 = 1'40''.$$

Hoc ergo casu ad tempus medium inter observationes elapsum addi debet $1'\,40''$ ut prodeat verum meridiei momentum.

§. 81. Major prodit hæc correctio si declinatio solis satis sit australis, quia tum *tang.* s, signum contrarium obtinebit, fitque $z = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{tang.\,p}{tang.\,c} + \frac{tang.\,s}{sin.\ c}\right)$, cujus ut exemplum afferamus, sit altitudo poli $p = 60°$; declinatio solis australis $= 23°\,28' = -s$; intervallum observationum $= 3^h\,40'$, seu in angulo $= 55° = 2c$; ideoque $c = 27°\,30'$; interea verò navis austrum versùs confecerit $36'$; erit $\pi = -36'$, & in tempore $\frac{1}{2}\pi = -1'\,12''$: unde calculus ita se habebit:

$$\begin{array}{ll} l.\,tang.\,p = 10{,}2385606 & l.\,tang.\,s = 9{,}6001181 \\ l.\,tang.\,c = 9{,}7164767 & l.\,sin.\ c = 9{,}6644056 \\ \hline 0{,}5220839 & 9{,}9357125 \end{array}$$

$$\frac{tang.\,p}{tang.\,c} = 3{,}327 \qquad \frac{tang.\,s}{sin.\ c} = \frac{0{,}862}{4{,}189}$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi = -1\tfrac{1}{5}$$

$$z = -5',027 = -5'\,1''$$

Hoc ergo casu à momento inter observationes medio subtrahi debet $5'\,1''$, ut verum meridiei tempus habeatur.

§. 82. Possent hinc ad singulos gradus tum declinationis solis, tum elevationis poli pro præcipuis temporis intervallis tabulæ computari, quæ valores $\frac{tang.\,p}{tang.\,c} + \frac{tang.\,s}{sin.\ c}$ exhiberent; tum enim numeri hujus tabulæ per semissem variationis latitudinis $\frac{1}{2}\pi$ multiplicati & in tempus conversi, dabunt correctionem meridiei ex hoc capite necessariam. Sufficiat autem hîc regulam ad computum satis fidelem tradidisse, & cùm aliæ determinationes difficiliores

calculos requirant, hu
rimus.

§. 83. Antequam a
notasse conveniet ex il
libus facilè elevationes
assignari posse. Si enin
eliminata supra littera
$cos.\ c = \frac{sin.\,a - sin.\,p\,sin.\,s}{cos.\,p\,cos.\,s}$
$cos.\,s\,cos.\,p$. Ex qua seq
non sit opus, valor p
v; ut sit $tang.\ v = \frac{}{cos.}$
$tang.\,v\,sin.\,p + cos.\,c\,c$
$+ cos.\,v\,cos.\,p$), ac pe
ergo commodè innote
altitudo poli quæsita p

§. 84. Quamquam
momenti, tamen ne ni
grediar, neque hanc f
sequentibus peculiarem
vestigandam adhibebo
tionem cognitam esse
cum hora diei ex obser
Nunc igitur restat, u
meridiei ab ipsis obser
que plures modos mer
omnes sequentes mod
meridiem respiciant,

§. 85. Dum autem
num erroribus oriund
omnes segrego, cùm q
verò, quoniam, quid

calculos requirant, hujusmodi tabulis facilè carere poterimus.

§. 83. Antequam autem hoc argumentum deseram, notasse conveniet ex illis duabus altitudinibus solis æqualibus facilè elevationem poli veram pro tempore meridiei assignari posse. Si enim p denotet hanc poli elevationem, eliminata supra littera Z, perveniet ad hanc æquationem, $\cos. c = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$, seu $\sin. a = \sin. s \sin. p + \cos. c \cos. s \cos. p$. Ex qua sequenti modo, ut extractione radicis non sit opus, valor p elicietur. Quæratur primò angulus v, ut sit $\text{tang.}\, v = \frac{\sin. s}{\cos. c \cos. s}$, eritque $\sin. a = \cos. c \cos. s \,\text{tang.}\, v \sin. p + \cos. c \cos. s \cos. p = \frac{\cos. c \cos. s}{\cos. v}(\sin. v \sin. p + \cos. v \cos. p)$, ac porro $\frac{\sin. a \cos. v}{\cos. c \cos. s} = \cos. (p - v)$. Hinc ergo commodè innotescit angulus $p - v$, ex eoque porro altitudo poli quæsita p.

§. 84. Quamquam cognitio elevationis poli maximi est momenti, tamen ne nimis longè à quæstione propositâ digrediar, neque hanc formulam uberiùs explico, neque in sequentibus peculiarem operam, ad elevationem poli investigandam adhibebo, sed vel aliunde jam poli elevationem cognitam esse assumam, vel quomodo conjunctim cum hora diei ex observationibus concludi possit, docebo. Nunc igitur restat, ut inquiram quantùm determinatio meridiei ab ipsis observationum erroribus afficiatur, neque plures modos meridiem determinandi afferam, cùm omnes sequentes modi horam diei determinandi simul ad meridiem respiciant, eumque definiant.

§. 85. Dum autem in turbationem ab ipsis observationum erroribus oriundam inquiro, reliquas anomalias omnes segrego, cùm quia eas jam sum contemplatus, tum verò, quoniam, quid omnes conjunctim efficiant, ex ſingulis ſeorſim concludi poteſt. Tam ſolis ergo declinationem, quàm ſitum navis immutabilem nunc conſidero, atque cùm in binas illas obſervationes duplex error irrepere poſſit, alter in altitudinibus ſolis, alter in æſtimatione intervalli temporis interea elapſi, utrumque pariter ſeorſim evolvam.

§. 86. Cùm igitur in utraque obſervatione, ſolis altitudo $= a$ putetur, ponamus diſcrimen inter ſolis altitudines eſſe $= \alpha$, ita ut, ſi altitudo primæ obſervationis fuerit $= a$, altitudo ſolis in altera obſervatione reverâ ſit $= a \pm \alpha$, denotabitque α errorem quem in obſervatione altitudinis committere poſſumus; hicque duplicatus eſſe poterit, ſi quidem altera in defectu, altera in exceſſu peccaverit. Unde ſi in una obſervatione duobus minutis errari queat, fieri poterit ut α fiat $= 4'$, quod tamen rariſſimè evenire cenſendum eſt.

§. 87. Ob hunc ergo errorem momentum meridiei à medio intervallo inter obſervationes elapſo pariter non nihil diſcrepabit. Sit ergo totum intervallum obſervationum in angulum converſum $= 2c$, & intervallum inter primam obſervationem & meridiem $= c + z$, erit intervallum à meridie ad ſecundam obſervationem $= c - z$. Unde ſi declinatio ſolis ſit $= s$, elevatio poli $= p$, habebuntur duæ ſequentes æquationes:

$$\text{I. } cof.\,(c + z) = \frac{fin.\,a - fin.\,p\; fin.\,s}{cof.\,p\; cof.\,s}.$$

$$\text{II. } cof.\,(c - z) = \frac{fin.\,(a \pm \alpha) - fin.\,p\; fin.\,s}{cof.\,p\; cof.\,s}.$$

§. 88. Cùm jam ob z & α valdè parva, ſit $cof.\,(c + z) = cof.\,c - z\, fin.\,c$, & $cof.\,(c - z) = cof.\,c + z\, fin.\,c$, atque $fin.\,(a \pm \alpha) = fin.\,a \pm \alpha\, cof.\,a$. Si prorſus æquatio à poſteriori ſubtrahatur, relinquetur $2z\, fin.\,c = \frac{\pm \alpha\, cof.\,a}{cof.\,p\; cof.\,s}$, ideoque $z = \pm \frac{1}{2} \alpha \frac{cof.\, a}{fin.\, c\; cof.\, p\; cof.\, s}$: unde ſi angulus $\frac{1}{2}\alpha$ in tempus convertatur, ſtatim prodibit error meridiei z in tempore expreſſus. Sic ſi α æſtimetur $5'$, hoc in tempore dabit $20''$, fietque $\frac{1}{2}\alpha = 10''$ temporis. Sit jam $2c = 2$ horas, ſeu angulus $c = 15°$, elevatio poli $p = 60°$, declinatio ſolis $s = 23° +$ altitudo $a = 6°$: reperietur $z = \pm 83''$. Quamquam ergo in hoc exemplo omnia obſervationem meridiei maximè perturbare aſſumta ſunt, tamen momentum meridiei tantùm ad $1' 23''$, incertum relinquitur.

§. 89. Quamvis igitur hunc errorem neque tollere neque emendare valeamus, tamen neceſſe fuit noſſe, quantùm ab eo determinatio meridiei impediatur; & quoniam reliquæ circumſtantiæ majorem accurationem non admittunt, ut intra minutum primum de vero meridiei momento certi eſſe queamus; hunc errorem eò faciliùs negligere poterimus, quòd eo incertitudo veri momenti meridiei notabiliter non afficiatur.

§. 90. Quod denique ad errorem, qui forte in æſtimatione temporis inter binas obſervationes elapſi, committitur, manifeſtum eſt, eo verum meridiei momentum à medio intervallo non removeri: neque ergo propterea correctione opus eſſet, etiamſi iſtum errorem definire poſſemus. Quamobrem methodo hîc expoſita, verum meridiei momentum tam accuratè definiri poſſe aſſumo, ut vix uno minuto primo à veritate aberret; valdèque dubito, an major certitudinis gradus obtineri queat. Multò tamen exactiùs definiri poterit, ſi plures obſervationes ſimul inſtituantur, atque inter omnes concluſiones medium quoddam eligatur.

VI.

Determinatio horæ diei per observationes Solis.

§. 91. IN præcedenti articulo ad solum momentum meridiei respeximus, à quo reliquæ horæ tam diurnæ quàm nocturnæ sunt numerandæ; nunc igitur docendum est, quomodo ex altitudinibus solis accuratè observatis, tam ante quàm post meridiem, vera diei hora colligi debeat, quæ, scilicet, ei meridiano, sub quo navis tempore observationis versatur, conveniat; perpetuò enim tenendum est eam horam requiri, quam exquisitissimum horologium solare, si tali uti liceret, in eodem loco eodemque tempore esset indicaturum.

§. 92. Hîc statim se offerunt duo casus, prout elevatio poli vel cognita fuerit vel incognita. Declinationem enim solis, quæ in determinationem temporis ingreditur, perpetuò cognitam esse assumo. Namque ephemerides solis imprimis ad manus esse oportet, ex quibus ad quodvis momentum ejus loci ad quod sunt computatæ, declinatio solis facilè colligitur. Etsi autem, ut idem sub alio meridiano inde præstari possit, differentiam meridianorum nosse oportet, tamen vix unquam navis in ejusmodi loco versatur, quin ejus longitudo ad aliquot gradus cognoscatur. Error autem vel quindecim graduum hîc commissus in declinatione solis nunquam errorem unius minuti pa[rit]; unde in hoc negotio declinationem solis omninò inter cognita referre licet.

§. 93. Ponamus ergo primò elevationem poli cognitam, sive ea nunc demum sit ex observatione

colle

ET A

collecta, sive jam ant

nita, ita ut variatio, q

ex æstimatione itineris

autem elevatione poli

vatione altitudinis soli

na sive pomeridiana d

vatio poli $=p$, declin

arcum s ejusque proinc

manente ejus cosinu),

pus à meridie in arcu

$cos. x = \frac{sin. a - sin. p\, sin. s}{cos. p\, cos. s}$

§. 94. Ex hac ergo f

tempus conversus, quin

habebitur vel hora ant

pore observationis, qu

bium esse nequit. Q

ope logarithmorum al

$= \sqrt{\frac{cos. p\, cos. s + sin. p\, sin.}{2\, cos. p\, cos. s}}$

cum jam sit $\frac{cos. A - cos. B}{2}$

$= cos. (90° - a)$, erit

$sin. \frac{90° - a - p + s}{2}$,

$\sqrt{\frac{sin. \frac{90° - a + p - s}{2} \times sin.}{cos. p\, cos. s}}$

num totum, quem hacte

§. 95. Quò usus huju

elevatio poli $p = 52°$ 2

$= 9° 15'$, seu $s = -9$

diem altitudo solis $a =$

Prix. 1747.

collecta, ſive jam ante non nimis magnum tempus definita, ita ut variatio, quæ interea ob motum navis ſit facta, ex æſtimatione itineris ſatis exactè aſſignari queat. Cognitâ autem elevatione poli cum declinatione ſolis, ex obſervatione altitudinis ſolis facilè hora diei, ſive antemeridiana ſive pomeridiana determinatur. Si enim ponatur elevatio poli $= p$, declinatio ſolis borealis $= s$ (pro auſtrali arcum s ejuſque proinde ſinum negativè accipi oportet, manente ejus coſinu), altitudo ſolis obſervata $= a$, & tempus à meridie in arcum æquatoris converſum $= x$, erit $\cos. x = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$.

§. 94. Ex hac ergo formula definitur angulus x, qui in tempus converſus, quindecim gradus uni horæ tribuendo, habebitur vel hora antemeridiana vel pomeridiana tempore obſervationis, quorum utrum locum habeat, dubium eſſe nequit. Quò autem hic calculus faciliùs ope logarithmorum abſolvi poſſit, quia eſt $\sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\cos. p \cos. s + \sin. p \sin. s - \sin. a}{2 \cos. p \cos. s}} = \sqrt{\frac{\cos. (p - s) - \sin. a}{2 \cos. p \cos. s}}$, cum jam ſit $\frac{\cos. A - \cos. B}{2} = \sin. \frac{A + B}{2} \times \sin. \frac{B - A}{2}$, & $\sin. a = \cos. (90° - a)$, erit $\frac{\cos. (p - s) - \cos. (90° - a)}{2} = \sin. \frac{90° - a + p - s}{2}. \sin. \frac{90° - a - p + s}{2}$, ideoque habebitur $\sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\sin. \frac{90° - a + p - s}{2} \times \sin. \frac{90° - a - p + s}{2}}{\cos. p \cos. s}} rr$; denotante r ſinum totum, quem hactenus poſui $= 1$.

§. 95. Quò uſus hujus formulæ exemplo illuſtretur, ſit elevatio poli $p = 52° 27'$, declinatio ſolis auſtralis $- s = 9° 15'$, ſeu $s = - 9° 15'$, & obſervata ſit ante meridiem altitudo ſolis $a = 19° 25'$, calculus ita ſe habebit.

$$p = 52^\circ 27' \qquad a = 19^\circ 25'$$
$$s = -9^\circ 15' \qquad 90 - a = 70^\circ 35'$$
$$p - s = 61^\circ 42' \qquad \frac{90-a}{2} = 35^\circ 17' 30''$$
$$\frac{p-s}{2} = 30^\circ 51' \qquad \frac{p-s}{2} = 30^\circ 51' 0''$$
$$\frac{90-a+p-s}{2} = 66^\circ 8' 30''$$
$$\frac{90-a-p+s}{2} = 4^\circ 26' 30''$$

$$l.\sin.\frac{90-a+p-s}{2} = 9{,}9612067$$
$$l.\sin.\frac{90-a-p+s}{2} = 8{,}8889883$$
$$\text{add. } l.rr \ldots\ldots 38{,}8501950 = A$$
$$l.\cos.p \ldots = 9{,}7849406$$
$$l.\cos.s \ldots = 9{,}9943156$$
$$19{,}7792562 = B$$
$$A - B = 19{,}0709388$$
$$l.\sin.\tfrac{1}{2}x = 9{,}5354694$$
$$\tfrac{1}{2}x = 20^\circ 4' 5''.$$

Erit ergo $x = 40^\circ 8' 10''$, qui arcus in tempus conversus dat $2^h 40' 33''$, ita ut observatio facta sit $9^h 19' 27''$ tempore vero.

§. 96. Cùm autem in altitudine solis a error aliquot minutorum possit esse commissus, hinc hora inventa incerta reddetur; quanta ergo sit hæc incertitudo, operæ pretium erit indagare. Sit ergo altitudo solis vera $= a + \alpha$, ubi α errorem in observatione commissum denotet atque tempus à meridie in angulum conversum sit reverâ $x + \xi$, erit $\cos. x = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$, & $\cos.(x + \xi) = \frac{\sin.(a+\alpha) - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$. Jam quia ob α & ξ valdè parva, est $\cos.(x + \xi) = \cos. x - \xi \sin. x$, & $\sin.(a + \alpha) = \sin. a + \alpha \cos. a$; erit $\xi \sin. x = \frac{-\alpha \cos. a}{\cos. p \cos. s}$ & $\xi = -\alpha \frac{\cos. a}{\cos. p \cos. s \sin. x}$.

§. 97. Error igitur in tempus redundans eò erit major, quò 1. Minus observatio distet à meridie. 2. Quò major fuerit declinatio solis. 3. Quò major fuerit elevatio poli. Et 4. Quò minor sit altitudo solis. In exemplo ergo antè allato, quo erat $p = 52^\circ 27'$, $s = -9^\circ 15'$, $a = 19^\circ 25'$, & $x = 40^\circ 8'$, error erit $\xi = -2{,}433 . \alpha$. Unde si α seu error in altitudine commissus sit $= 5'$, seu in tempore $= 20''$, erit error in horæ determinationem inde ortus $= 48''$ qui, cùm integrum minutum non exhauriat,

facilè negligi potest, præ
subsistat.

§. 98. Formula inver
meridie ubi $x = 0$, erro
sed notandum est hoc cas
quam evanescens conside
valere. Si enim sit $x = 0$,
$= \cos.(p - s)$, & $\cos. a = \ldots$
sit $\cos. \xi = \frac{\sin.(a+\alpha) - \sin. p \sin \ldots}{\cos. p \cos. s}$
ob $\cos. \xi = 1 - \frac{1}{2}\xi\xi$, $\cos. \ldots$
$1 - \frac{1}{2}\xi\xi = \frac{\cos. p \cos. s + \alpha \sin.(\ldots}{\cos. p \cos. s}$
$= -2\alpha(\tan g. p - \tan g \ldots$
posito radio $= 1$, eritque
roris α) ponatur $\alpha = 5' = \ldots$
$= 3438'$, fiet $\xi = \sqrt{343\ldots}$
tempore erit error $12'\ 24\ldots$
magnus, ante peculiarem
tradidi.

§. 99. Si in elevatione
sit dp, in angulo quoque h
hicque ex differentiatione
ponendis x & p variabili
$-dx \sin. x = \frac{-dp \sin. s}{\cos. s} + \ldots$
$= \frac{dp(\sin. s - \sin. a \sin. p)}{\cos. p^2 \cos. s \sin. x}$. Qu
meridiem, facilè tolerari
li non nimis aberret.

§. 100. In ortu vel oca
observare licet, dummod
quemadmodum illustriss.

facilè negligi poteſt, præſertim ſi error altitudinis infra $5''$ ſubſiſtat.

§. 98. Formula inventa $\xi = -\alpha \frac{\cos. a}{\cos. p \cos. s \sin. x}$ in ipſo meridie ubi $x = 0$, errorem infinitum indicare videtur: ſed notandum eſt hoc caſu quia ξ præ x non ampliùs tanquam evaneſcens conſiderari poteſt, eam formulam non valere. Si enim ſit $x = 0$, erit $\sin. a = \cos. p \cos. s + \sin. p \sin. s = \cos. (p - s)$, & $\cos. a = \sin. p \cos. s - \cos. p \sin. s$. Cùm ergo ſit $\cos. \xi = \frac{\sin. (a + \alpha) - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s} = \frac{\sin. a \cos. \alpha + \cos. a \sin. \alpha - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s.}$, ob $\cos. \xi = 1 - \frac{1}{2} \xi \xi$, $\cos. \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha \alpha$, & $\sin. \alpha = \alpha$ erit $1 - \frac{1}{2} \xi \xi = \frac{\cos. p \cos. s + \alpha \sin. (p - s)}{\cos. p \cos. s}$; ideòque $\xi \xi = \frac{-2 \alpha \sin. (p - s)}{\cos. p \cos. s} = -2 \alpha (\tang. p - \tang. s)$. Sit $\tang. p - \tang. s = n$ poſito radio $= 1$, eritque $\xi \xi = 2 n \alpha$; (mutato ſigno erroris α) ponatur $\alpha = 5' = \frac{1}{12}^{\circ}$; & ob radium $1 = 57 \frac{1}{3}^{\circ} = 3438'$, fiet $\xi = \sqrt{3438 0 n}$ minus $= 186' \sqrt{n}$, & in tempore erit error $12' \, 24'' \sqrt{n}$. Qui error cùm nimis ſit magnus, ante peculiarem methodum meridiem inveniendi tradidi.

§. 99. Si in elevatione poli p error committatur, qui ſit dp, in angulo quoque horario x error naſcetur qui ſit dx, hicque ex differentiatione æquationis $\cos. x = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}$ ponendis x & p variabilibus cognoſcetur, erit namque $-dx \sin. x = \frac{-dp \sin. s}{\cos. s} + \frac{dp \sin. p (\sin. a - \sin. p \sin. s)}{\cos. p^2 \cos. s}$, & $dx = \frac{dp (\sin. s - \sin. a \sin. p)}{\cos. p^2 \cos. s \sin. x}$. Qui error iterùm, niſi circa ipſum meridiem, facilè tolerari poteſt, dummodo elevatio poli non nimis aberret.

§. 100. In ortu vel ocaſu ſolis, quem ſine inſtrumentis obſervare licet, dummodo refractionis ratio habeatur, quemadmodum illuſtriſſ. Dominus de Maupertuis, in

Astronomia Nautica docet, hora diei, siquidem elevatio poli & declinatio solis sit nota, facillimè definietur. Cùm enim tum sit $\alpha = o$, erit $cos.\, x = \frac{-sin.\, p\, sin.\, s}{cos.\, p\, cos.\, s} = -\, tang.\, p\; tang.\, s$: unde si declinatio solis sit borealis, fiet $x > 90^\circ$, contra verò minor & utroque casu angulus x in tempus conversus, monstrabit verum momentum vel ortûs solis vel occasûs tempore.

§. 101. Quia hactenus altitudinem poli satis exactè cognitam assumsi, nunc ad alteram hujus sectionis partem progrediar, investigaturus quomodo horam diei per observationes solis definiri conveniat, si elevatio poli penitùs sit incognita. Ac primo quidem liquet hoc per unicam solis observationem præstari non posse, sed ad minimum duas altitudines solis adhiberi debere. Hincque ergo non solùm ad tempus interea præterlapsum, sed etiam ad variationem declinationis solis, & potissimùm ad mutationem loci, quam navis interea subierit, erit respiciendum, quibus rebus hæc determinatio non parum difficilis redditur.

§. 102. Ut has difficultates paulatim superemus, ponamus primò navem situm non mutare, atque ex duabus altitudinibus solis, dato temporis intervallo, observatis, facilè invenietur verum tempus pro utravis observatione; sive solis declinatio interea mutetur, sive minus. Sit enim

Fig. VII. HOZ meridianus loci, in quo navis existit, P polus, Z zenith, A & a loca solis binis observationum momentis, dabunturque arcus AP, aP quippe declinationum solis complementa, simulque ex tempore præterlapso cognoscitur angulus APa, præterea verò dantur arcus verticalium circulorum ZA, Za, ut pote altitudinum observatarum complementa.

§. 103. Jam per puncta A & a concipiatur ductus arcus circuli maximi, quo quidem non via à sole percursa, præsentabitur, & in triangulo sphærico APa ex datis lateribus AP & aP, cum angulo intercepto APa invenietur latus Aa & anguli PAa, & PaA. Tum in triangulo AZa, cognitis omnibus lateribus, reperientur anguli ZAa, ZaA; ex quibus cum angulis PAa & PaA collatis, elicientur anguli ZAP & ZaP, hincque denique in triangulo ZAP, ob data latera ZA, PA & angulum ZAP, invenietur latus PZ complementum elevationis poli, & angulus ZPA, quo tempus alterius observationis à meridie indicabitur.

§. 104. Cùm igitur hic casus nihil habeat difficultatis, ponamus navem interea cursu suo tantùm longitudinem mutasse, ita ejus latitudo manserit eadem, perspicuum est angulum ad polum APa jam non ampliùs tempore inter observationes elapso mensurari, sed angulo ex hoc temporis intervallo deducto mutationem longitudinis vel esse addendam vel demendam, prout navis vel ab occidente in orientem vel ab oriente in occidentem feratur. Hoc autem angulo APa definito, reliqua definientur trigonometricè ut antè, reperieturque tam elevatio poli, quàm vera diei hora tempore utriusque observationis.

§. 105. Sin autem navis interea quoque latitudinem mutaverit, calculus aliquanto fiet difficilior atque ad formulam generalem suprà adhibitam primùm recurramus. Sit tempore primæ observationis elevatio poli $= p$; declinatio solis $= s$, altitudo solis observata $= a$, atque angulus horarius, seu qui verum tempus à meridie ejus loci, ubi terra nunc versatur, indicat, $= x$. Tempore secundæ observationis sit elevatio poli $= p + dp$, declinatio solis $= s + ds$; altitudo solis observata $= a'$, & angulus horarius verum tempus à meridie hujus loci, ubi navis nunc hæret, indicans $= x'$.

§. 106. Sit intervallum temporis harum duarum obſervationum jam more ſolito ad angulum horarium reductum $= v$; hocque tempore navis ſecundùm longitudinem ab occidente in orientem confecerit angulum $= \mu$; ſecundùm latitudinem verò boream verſùs acceſſerit per angulum ν, ubi me non monente intelligitur, ſi navis vel in occidentem, vel auſtrum verſùs, ſit progreſſa, tum vel $-\mu$ pro μ, vel $-\nu$ pro ν ſcribi oportere. Erit ergo $x' - x = v + \mu$, ideoque $x' = x + v + \mu$; & $dp = \nu$: atque ex formula ſuprà data colligitur, $cof.\, x = \frac{fin.\, a - fin.\, p\, fin.\, s}{cof.\, p\, cof.\, s}$ & $cof.\, x' = \frac{fin.\, a' - fin.\, (p + dp)\, fin.\, (s + ds)}{cof.\, (p + dp)\; cof.\, (s + ds)}$.

§. 107. Ex his quantitatibus cognitæ ſunt s, $s + ds$ declinatio, ſcilicet, ſolis in utraque obſervatione borealis; nam pro auſtrali hi anguli negativè ſunt accipiendi, porrò altitudines a & a' cum intervallo v, atque mutationes longitudinis & latitudinis μ & ν; manentque duæ incognitæ x & p definiendæ, quibus etiam binæ æquationes inventæ ſufficiunt. Poſterior autem æquatio, evolutis differentialibus, dat $cof.\, x' = \frac{fin.\, a' - fin.\, p\, fin.\, s}{cof.\, p\, cof.\, s} + \frac{dp\, (fin.\, a'\, fin.\, p - fin.\, s}{cof.\, p^2\, cof.\, s}$ $+ \frac{ds\, (fin.\, a'\, fin.\, s - fin.\, p)}{cof.\, p\, cof.\, s^2} = cof.\, (x + v + \mu)$. Quòd ſi jam hinc p eliminare velimus, ope æquationis $cof.\, x = \frac{fin.\, a - fin.\, p\, fin.\, s}{cof.\, p\, cof.\, s}$, reperietur quidem æquatio valorem anguli x definiens, ſed opus foret immenſum calculum inde adſtruere.

§. 108. Calculum autem multò faciliùs expedire poterimus, ſi modò azimuthum ſolis in alterutra obſervatione in computum ducamus, quod ſufficit circiter ſaltem noſſe, etiamſi error inde oriundus, ſi opus videatur, facilè corrigi queat. Beneficio autem acûs magneticæ azimutha non adeò ſunt incognita; ut non ad aliquod ſaltem gradus æſtimari queant, quod ad meum propoſitum ſufficit.

Sumto ergo polo P, forn
quem vocemus brevitatis
$= 90° - s$, & $Pa = 90°$
lo ſphærico APa definiet
gulis PAa, PaA.

§. 109. Sit porro angul
ridianus pro loco ſolis viſo
$- p$, arcus ZA præbebit
in prima obſervatione. Dei
erit $ZPa = x'$, ideoque c
meridianum reſpectu loci
ne. Quare ſi capiatur Pz
bit arcus za complementu
obſervatione: ſicque hab
$= 90° - a'$, atque $Zz =$

§. 110. Sit jam azimuth
ſeu angulus $Hza = \theta$, qu
eſſe pono; & ex Z ad az
erit $zu = \nu\, cof.\, \theta$. Concipia
mi Za erit $Za = au = 90$
cognita in triangulo AZa t
ZAa & ZaA, & ob Zu
$= \frac{\nu\, fin.\, \theta}{cof.\, a'}$; ideoque & angul

§. 111. Nunc in triangul
$- s - ds$, $za = 90° - a$
$= zaA$, hincque reperien
mentum latitudinis navis in
de angulus $aPz = x + v +$
$= x$, ſeu tempus verum in
terea verò elicietur angulus
crepare deprehendatur ab a
jam ſubſtituatur, idemque

Sumto ergo polo P, formetur angulus $APa = v + \mu$, Fig. VIII. quem vocemus brevitatis gratiâ $= u$, capianturque $PA = 90^\circ - s$, & $Pa = 90^\circ - s - ds$. Hincque in triangulo sphærico APa definietur tertium latus Aa, cum angulis PAa, PaA.

§. 109. Sit porro angulus $ZPA = x$, erit PZH meridianus pro loco solis viso prioris, unde si fiat $PZ = 90^\circ - p$, arcus ZA præbebit complementum altitudinis solis in prima observatione. Deinde cùm sit $ZPa = x + v + \mu$ erit $ZPa = x'$, ideoque circulus $HZPO$ referet quoque meridianum respectu loci solis a in posteriori observatione. Quare si capiatur $Pz = 90^\circ - p - dp$, repræsentabit arcus za complementum altitudinis solis in posteriori observatione: sicque habebitur $ZA = 90^\circ - a$, & $za = 90^\circ - a'$, atque $Zz = dp = v$.

§. 110. Sit jam azimuthum in posteriori observatione, seu angulus $Hza = \theta$, quem proximè saltem cognitum esse pono; & ex Z ad az ducatur perpendiculum Zu, erit $zu = v \cos\theta$. Concipiatur ductus arcus circuli maximi Za erit $Za = au = 90^\circ - a' - \frac{v}{u} \cos\theta$, atque ob cognita in triangulo AZa tria latera, invenientur anguli ZAa & ZaA, & ob $Zu = v \sin\theta$, erit angulus $Zaz = \frac{v \sin\theta}{\cos a'}$; ideoque & angulus zaA erit datus.

§. 111. Nunc in triangulo Paz dantur latera $Pa = 90^\circ - s - ds$, $za = 90^\circ - a'$, & angulus $zaP = PaA = zaA$, hincque reperientur primò latus Pz complementum latitudinis navis in posteriori observatione, deinde angulus $aPz = x + v + \mu$, & proinde angulus $APZ = x$, seu tempus verum in utraque observatione. Præterea verò elicietur angulus Pza, qui si notabiliter discrepare deprehendatur ab assumto azimutho θ, is loco θ jam substituatur, idemque calculus repetatur. Hocque pacto per merum calculum geometricum, cujus præcepta ubique exstant, hoc problema aliàs difficillimum facilè resolvetur.

§. 112. Problema ergo hoc in navigatione utilissimum; quo ex observatis duabus altitudinibus solis, & tempore interea elapso, hora diei cum elevatione poli quæritur, ita hîc solutum dedi, ut calculus ob ipsius navis motum vix molestior reddatur. Etsi ergo sæpissimè variatio latitudinis Zz tam parva est, ut tutò omitti posset, tamen ejus quoque ratione habitâ calculus non turbatur; quamobrem cùm hæc operatio magis contrahi nequeat ut vulgaribus regulis Trigonometriæ absolvetur, ne exemplo quidem ad ejus illustrationem opus esse judico: atque ad observationes nocturnas, in quibus crepusculares simul sum complexus, progrediar.

Determinatio hora
Poli

§. 113. NOCTU ig
bus stellarun
concludi debet, quarum
siones rectas ad quodvis
que ergo hîc ejusmodi
stellarum incognitarum
Stellæ autem fixæ hoc pra
perpetuò (saltem quamdi
clinationem conservent:
variationis quoque quam
ties opus fuerit, ratio erit

§. 114. Ad manus erg
puarum stellarum fixarum
nes & ascensiones rectæ a
cipitur, sint expressæ. Pr
esse debent ephemerides
num computatæ; ex quib
nes & ascensiones rectæ,
tiones diurnæ cognosci q
notavi, observatorem in
ridibus solaribus, quonia
ferri solent.

§. 115. Cùm quælibe
num revertatur post 23^h 5
tum medium eandem p

VII.

Determinatio horæ nocturnæ, si elevatio Poli sit data.

§. 113. NOCTU igitur verum tempus ex altitudinibus stellarum, sive fixarum sive inerrantium concludi debet, quarum tam declinationes quàm ascensiones rectas ad quodvis tempus cognitas esse assumo; neque ergo hîc ejusmodi methodis quæ ad observationes stellarum incognitarum sunt accommodatæ, immorabor. Stellæ autem fixæ hoc præ sole gaudent commodo, quòd perpetuò (saltem quamdiu iter navis durat) eandem declinationem conservent: sin autem planetæ adhibeantur, variationis quoque quam in declinatione patiuntur, quoties opus fuerit, ratio erit habenda.

§. 114. Ad manus ergo esse pono catalogum præcipuarum stellarum fixarum, in quo singularum declinationes & ascensiones rectæ ad id tempus, quo navigatio suscipitur, sint expressæ. Præterea verò quoque in promtu esse debent ephemerides planetarum ad præsentem annum computatæ; ex quibus non solùm eorum declinationes & ascensiones rectæ, sed etiam harum rerum variationes diurnæ cognosci queant. Imprimis autem, ut jam notavi, observatorem instructum esse oportet, ephemeridibus solaribus, quoniam omnia tempora ad solem referri solent.

§. 115. Cùm quælibet stella fixa ad eundem meridianum revertatur post $23^h\ 56'\ 4''$, dum sol secundùm motum medium eandem periodum absolvit tempore 24 horarum, ſi illud temporis intervallum $23^h\ 56'\ 4''$ in 24 partes æquales dividatur, hæ partes horæ ſidereæ appellari ſolent ad diſtinctionem horarum communium, quæ ex motu ſolis definiuntur; eritque hora ſiderea ad horam ſolarem ut 86164 ad 86400, ſeu proximè ut 365 ad 366, unde converſio horarum ſiderearum in ſolares nihil habebit difficultatis & contrà.

§. 116. Aſcenſiones rectæ à principio arietis ſecundùm ſignorum ordinem numerari ſolent, unde cujuſque ſtellæ aſcenſio recta indicat, quanto ea temporis intervallo poſt initium arietis ad eundem meridianum appellat. Hoc, ſcilicet, tempus in horis ſidereis exprimitur, ſi quindeni gradus aſcenſionis rectæ in unam horam computentur: vel ſi 360° pro $23^h\ 56'\ 4''$ ſumatur, prodibit tempus in horis ſolaribus expreſſum. Quia porro in ephemeridibus appulſus principii arietis ad meridianum aſſignari ſolet, hinc verum tempus quo quævis ſtella fixa ad meridianum venit, innoteſcet.

§. 117. Hoc quoque tempus hujuſmodi tabulis deficientibus hoc modo colligitur, ſubtrahatur aſcenſio recta ſolis, quam ipſo meridie proximè elapſo tenuit, ab aſcenſione recta ſtellæ, & reſiduum in horas ſidereas converſum dabit tempus, quo hæc ſtella per meridianum tranſiit, in horis ſidereis expreſſum, quas deinde in horas ſolares mutare convenit. Vel cùm tabulæ habeantur, quæ differentias aſcenſionum rectarum in horis ſolaribus exhibeant, & viciſſim cujuſmodi in *Notitiâ temporum*, quæ Pariſiis quot annis edi ſolet, *pag.* 93 *&* 94, eſt inſerta, ejus ope cujuſque ſtellæ appulſus ad meridianum in horis ſolaribus ſtatim reperitur; ſicque horis ſidereis carere poterimus.

§. 118. In ephemeridibus porro aſcenſio recta ſolis ad meridiem ejus loci, ad quem ſunt computatæ, exhibetur: unde ſi ejus variatio diurna ſpectatur, pro quovis alio meridiano; cujus differentia ab illo constat, ipso meridiei momento ascensio recta solis concludetur. Neque verò ad hoc accuratâ longitudinis cognitione opus est, cùm error 15° in longitudine commissus, in ascensione recta tantum $2'$ circiter producat. In navigatione autem vix unquam longitudo loci adeò incerta esse solet, ut ex hoc capite error sit metuendus.

§. 119. Cùm igitur tempus sit cognitum, quo quævis stella fixa ad meridianum ejus loci ubi navis versatur appellet, si ipsum transitum cujuspiam stellæ fixæ per meridianum observare liceret, tum eo momento vera diei hora haberetur, sed jam suprà animadverti observationes transituum per meridianum nimis esse incertas quàm ut eæ ad temporis determinationem adhiberi possent. Interim tamen plurimùm proderit culminationes stellarum seu maximas earum altitudines observare, quia inde ob earum declinationem cognitam elevatio poli certissimè colligi potest. Quod ad modos in hac sectione tradendos eo magis erit necessarium, quia hîc elevationem poli cognitam assumo.

§. 120. Ad verum ergo tempus definiendum stellas eligi oportet, quæ jam à meridiano sunt remotiores; ubi primùm attendendùm est, utrùm ad meridianum accedant, an verò jam versùs occasum inclinent; seu an observatio ante ejus appulsum ad meridianum, an post instituatur. In qua quidem dijudicatione nullus est metuendus error. Deinceps autem fusiùs investigabo, quænam stellæ fixæ, si quidem delectus concedatur, ad hoc institutum sint aptissimæ.

§. 121. Observetur ergo instrumento, quod maximè idoneum videbitur, stellæ cujuspiam fixæ, cujus ascensio recta ac declinatio sit cognita, distantia à zenith ZS quæ sit $= a$. Tum sit elevatio æquatoris, seu distantia poli à Fig. VI.

zenith $PZ = p$, & diſtantia ſtellæ à polo $PS = s$ quæ ex ejus declinatione habetur: atque in triangulo ſphærico PZS omnia latera erunt cognita, unde ſi angulus horarius ZPS vocetur $= x$, erit $cof.\ x = \frac{cof.\ a - cof.\ p\ cof.\ s}{fin.\ p\ fin.\ s}$.

§. 122. Invento ergo hinc angulo x, inſtituatur hæc proportio ut $360°$ ad $23^h\ 56'\ 4''$, ita angulus x, ad tempus in horis ſolaribus expreſſum, quod tempori, quo eadem ſtella fixa per meridianum tranſire fuerit reperta, vel additum vel demtum, prout obſervatio vel poſt vel ante ſtellæ culminationem fuerit inſtituta, dabit verum tempus ſolare, tempore obſervationis.

§. 123. Quo autem in hoc calculo commodiùs logarithmis uti liceat, quæratur ſemiſſis anguli x, nam ob $fin.\ \tfrac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 - cof.\ x}{2}}$, erit $fin.\ \tfrac{1}{2}x = \sqrt{\frac{fin.\ p\ fin.\ s + cof.\ p\ cof.\ s - cof.\ a}{2\ fin.\ p\ fin.\ s}}$ $= \sqrt{\frac{cof.\ (p-s) - cof.\ a}{2\ fin.\ p\ fin.\ s}}$. At eſt $cof.\ (p-s) - cof.\ a = 2\ fin.\ \frac{p-s+a}{2}\ fin.\ \frac{a-p+s}{2}$, unde erit $fin.\ \tfrac{1}{2}x = \sqrt{\frac{fin.\frac{a+p-s}{2}\ fin.\frac{a-p+s}{2}}{fin.\ p\ fin.\ s}}$.

Hincque commodè per calculum elicietur angulus $\tfrac{1}{2}x$.

§. 124. Ponamus anno 1743 Maii die 11 veſperi, navem in loco verſari, cujus longitudo Pariſiis occidentem verſùs æſtimatur circiter $55°$, & elevatio poli inventa ſit $32°\ 24'$, atque ſtellæ urſæ majoris α ſignatæ altitudinem obſervari $51°\ 8'$ poſt ejus culminationem, quæriturque pro momento obſervationis verum tempus.

§. 125. Ex ephemeridibus igitur primò reperitur pro meridie diei 11 Maii anno 1743, ſub meridiano Pariſienſi, aſcenſio recta ſolis $47°\ 49'\ 37''$, quæ intervallo unius diei creſcit $58'\ 37''$. Quia jam locus navis æſtimatur $55°$ occidentalior, dum ſol per ejus meridianum tranſiit, erat ejus aſcenſio recta major, ſcilicet $= 47°\ 49'\ 37''$

$+ \frac{55}{360}\ 58'\ 37'' = 47°\ 58'$
ris invenitur declinatio bo
ſio recta $= 161°\ 54'\ 55$
recta ſolis $= 47°\ 58'\ 34''$
tempus ope tab. *pag.* 93,
$29''$, ita ut hæc ſtella die
$34'\ 29''$ per meridianum
§. 126. His præparatis
erit elevatio æquatoris PZ
læ à polo $PS = s = 26°\ 5$
nith obſervata $ZS = 38°$
adornabitur.

$$p = 57°\ 36'\ 0''$$
$$s = 26°\ 51'\ 40''$$
$$p - s = 30°\ 44'\ 20''$$
$$\frac{p-s}{2} = 15°\ 22'\ 10''$$

$$log.\ fin.\ \frac{a+p-s}{2} = 9{,}7564485$$
$$l.\ fin.\ \frac{a-p+s}{2} = 8{,}8504550$$
$$\text{cum quadr. radii} = 38{,}6069035$$
$$l.\ fin.\ p = 9{,}9265112$$
$$l.\ fin.\ s = 9{,}6549744$$
$$19{,}5814856$$
$$\text{divid. per } 2 \ldots\ 19{,}0254179$$
$$l.\ fin.\ \tfrac{1}{2}x = 9{,}5127089$$

§. 127. Cùm ergo ſtell
appulerit tempore $7^h\ 34'$
diùs facta fuiſſe inventa ſit
illum addamus, habebimu
vationis momento, ſcilic

$+\frac{55}{360}\, 58' 37'' = 47^\circ\, 58'\, 34''$, ſtellæ autem α urſæ majoris invenitur declinatio borealis $= 63^\circ\, 8'\, 22''$, & aſcenſio recta $= 161^\circ\, 54'\, 55''$, à qua ſubtrahatur, aſcenſio recta ſolis $= 47^\circ\, 58'\, 34''$ remanet $113^\circ\, 56'\, 21''$ quod in tempus ope tab. *pag.* 93, *Not. temp.* converſum dat $7^h 34'\, 29''$, ita ut hæc ſtella die propoſito veſperi horâ ſeptimâ $34'\, 29''$ per meridianum loci, ubi navis eſt tranſierit.

§. 126. His præparatis in triangulo ſphærico PZS, erit elevatio æquatoris $PZ = p = 57^\circ\, 36'$, diſtantia ſtellæ à polo $PS = s = 26^\circ\, 51'\, 38''$, & diſtantia ſtellæ à zenith obſervata $ZS = 38^\circ\, 52' = a$: unde calculus ita adornabitur.

$p = 57^\circ\, 36'\, 0''$	$\frac{1}{2}a = 19^\circ\, 26'\, 0''$
$s = 26^\circ\, 51'\, 40''$	$\frac{p-s}{2} = 15^\circ\, 22'\, 10''$
$p - s = 30^\circ\, 44'\, 20''$	$\frac{a+p-s}{2} = 34^\circ\, 48'\, 10''$
$\frac{p-s}{2} = 15^\circ\, 22'\, 10''$	$\frac{a-p+s}{2} = 4^\circ\, 3'\, 50''$

$log.\ sin. \frac{a+p-s}{2} = 9{,}7564485$	Hinc ergo invenitur.
$l.\ sin. \frac{a-p+s}{2} = 8{,}8504550$	$\frac{1}{2}\varkappa = 19^\circ\, 0'\, 10''$
cum quadr. radii $= 38{,}6069035$	$\varkappa = 38^\circ\, 0'\, 20''$
$l.\ sin.\ p = 9{,}9265112$	quod in tempus per tab. 93 alleg. converſum dat :
$l.\ sin.\ s = 9{,}6549744$	
$19{,}5814856$	30° .... $1^h\, 59'\, 40''$
divid. per 2.... $19{,}0254179$	8° .... $31'\, 53''$
$l.\ sin. \frac{1}{2}\varkappa = 9{,}5127089$	$20''$ .... $1''$
	Tempus $2^h\, 31'\, 34''$

§. 127. Cùm ergo ſtella α urſæ majoris ad meridianum appulerit tempore $7^h\, 34'\, 29''$, atque obſervatio nunc tardiùs facta fuiſſe inventa ſit $2^h\, 31'\, 34''$; ſi hunc numerum ad illum addamus, habebimus verum tempus pro ipſo obſervationis momento, ſcilicet, $10^h\, 6'\, 3''$ poſt meridiem diei 11 Maii. Perspicuum autem est hunc calculum multùm fore succinctiorem, si explicationes hîc adjectæ omittantur. Neque etiam opus esse arbitror applicationem formulæ datæ ostendere, si vel arcus $Ps\ 90^\circ$ superet, vel navis in hemispherio telluris australi versetur, quia has circumstantias eum, qui calculum suscipit probè nosse oportet.

§. 128. Si in altitudine stellæ error quidam fuerit commissus, tempus quoque inde conclusum, seu angulus z erit erroneus, cujus error facilè reperietur, si æquatio $\cos. z = \frac{\cos. a - \cos. p \cos. s}{\sin. p \sin. s}$ differentietur positis z & a variabilibus; unde fiet $dz \sin. z = \frac{da \sin. a}{\sin. p \sin. s}$. Hincque $dz = da \frac{\sin. a}{\sin. p \sin. s \sin. z}$. Quare si in altitudine error committatur $= da$, inde in angulum horarium z influet error $dz = da \frac{\sin. a}{\sin. p \sin. s \sin. z}$ seu posito $\frac{\sin. a}{\sin. p \sin. s \sin. z} = n$, si sit $da = 5'$, erit $dz = n\, 5'$: hincque in tempore orietur error $20\, n''$.

§. 129. Quò ergo hic error minimè sit perceptibilis, requiritur primò ut angulus horarius z satis sit notabilis; atque ut stella à polo 90 gradibus distet, seu prope æquatorem sit sita: tum verò ut stella tam parum à zenith distet, quàm prima conditio permittit. Utrique enim simul satisfieri nequit, quia quò major capitur angulus z, eò major quoque distantia stellæ à zenith evadet.

§. 130. Videamus ergo in quonam circulo horario data stella observari debeat, ut coefficiens $n = \frac{\sin. a}{\sin. p \sin. s \sin. z}$, seu tantùm fractio $\frac{\sin. a}{\sin. z}$ fiat minima. Hoc autem evenit si $da \cos. a \sin. z = dz \sin. a \cos. z$. At est $dz = \frac{da \sin. a}{\sin. p \sin. s \sin. z^2}$; ergo fit $\cos. a = \frac{\sin. a^2 \cos. z}{\sin. p \sin. s \sin. z}$, seu $\cos. a \sin. p \sin. s - \cos. a \sin. p \sin. s \cos. z^2 = \sin. a^2 \cos. z$, ubi si valor loco $\cos. z$ substituatur, invenietur $\frac{cos. a}{1+cos. a^2} = \frac{cos. p\, cos. s}{cos. p^2\, cos. s^2}$; hincque duplex valor prodit, vel $cos. a = \frac{cos. p}{cos. s}$, vel $cos. a = \frac{cos. s}{cos. p}$, quorum prior eligendus est si $p > s$, posterior si $p < s$.

§. 131. Sit igitur $cos. a = \frac{cos. p}{cos. s}$, erit $fin. a = \frac{\sqrt{(cos. s^2 - cos. p^2)}}{cos. s}$ & $cos. x = \frac{cos. p\, fin. s}{fin. p\, cos. s}$, atque $fin. x = \frac{\sqrt{(cos. s^2 cos. p^2)}}{fin. p\, cos. s}$, hincque fit $n = \frac{1}{fin. s}$, qui valor fit minimus si $s = 90^\circ$, sed tum fieri nequit $p > s$. Quare propositâ stellâ quâcunque, eam tum observari conveniet, quando fuerit vel $cos. a = \frac{cos. p}{cos. s}$, vel $cos. a = \frac{cos. s}{cos. p}$. Cùm autem stellæ in æquatore sitæ sint aptissimæ, si qua earum eligatur, fiet $s = 90^\circ$, & $n = \frac{fin. a}{fin. p\, fin. x}$; qui valor minor fieri nequit quàm si $fin. x$ sit maximus; quod evenit, si hæc stella prope circulum horarium sextæ horæ observetur; hæcque est tutissima regula ad tempus quàm exactissimè inveniendum.

§. 132. Sin autem in altitudine poli fuerimus decepti, videamus cujusmodi observationes instituere oporteat, ut determinatio temporis inde quàm minimè turbetur. In hunc finem differentiemus æquationem $cos. x = \frac{cos. a - cos. p\, cos. s}{fin. p\, fin. s}$, ponendis x & p variabilibus, reperieturque $-dx\, fin. x = \frac{dp\, cos. s}{fin. s} - \frac{dp\, cos. p\,(cos. a - cos. p\, cos. s)}{fin. p^2\, fin. s}$, seu $dx\, fin. x = \frac{dp\,(cos. a\, cos. p - cos. s)}{fin. p^2\, fin. s}$.

§. 133. Manifestum ergo est errorem in tempus hinc redundantem penitùs evanescere, si sit $cos. s = cos. a\, cos. p$, seu $cos. a = \frac{cos. s}{cos. p}$. Quòd si ergo stella in æquatore eligatur, hic error evitatur, si stella in ipso horizonte observetur, quod cùm congruat cum horario sextâ horæ pro hac stellâ, quæ conditio antè est requisita, perspicuum est utrique incertitudini optimè occurri, si stella non longè ab æquatore remota prope horizontem observetur.

§. 134. Cùm autem prope horizontem refractiones nimis sint magnæ, atque raró stellas in hac regione distinctè cernere liceat, facilè intelligitur regulam inventam pro circumstantiis quàm proximè tantùm esse observandam, & quia fieri nequit $a = 90^\circ$: eligatur stella declinationis cujusdam borealis, verbi gratiâ 15°, & æquatio $\cos. a = \frac{\cos. s}{\cos. p} = \frac{\sin. 15^\circ}{\cos. p}$, dabit altitudinem hujus stellæ observandam, quâ non solùm error ex erronea elevatione poli oriundus penitùs tollitur, sed etiam, qui ex minus accuratâ observatione nascitur, minimus redditur; suprà enim §. 129 elicuimus quoque hanc æquationem $\cos. a = \frac{\cos. s}{\cos. p}$.

§. 135. Sub quavis ergo elevatione poli hoc judicium quænam stella optimo cum successu ad observationem eligatur, facilè instituitur. Primùm enim dispiciatur, quà exigua altitudine stella distinctè observari possit, cujus altitudinis complementum vocetur $= a$; tum quæratur s, ut sit $\cos. s = \cos. a \cos. p$, & inter stellas quæ à zenith intervallo $= a$, remotæ æstimantur, eligatur una, cujus distantia à polo sit proximè $= s$. Hancque stellam diligenter observando, dico conclusionem temporis inde deductam quàm minimè à vero esse aberraturam. Hoc autem modo quæstioni propositæ ex asse satisfactum esse arbitror.

Determinatio hor

sit

§. 136. QUAND
que præter
elevationem investigare
duabus observationibus
duarum diversarum; un
tiones erunt pertractand
tis ejusdem stellæ duab
terea elapso vera hora
modo ex observatis du
simul vel successivè, ita
tum, verum tempus sit

§. 137. Quamvis ha
utilitatem, tamen iis ca
vatio non difficulter tan
cedente assumsimus, æs
sit instrumentis. Deinde
mittendas esse observati
cludi possit, sicque vix
sint conspicuæ, elevatio
gam turbidam tempes
stellasque aliquot transir
poli cognita, neque si s
lectus stellarum ad obse

§. 138. Quod igitu
eadem stella bis interj

VIII.

Determinatio horæ nocturnæ, si elevatio poli sit incognita.

§. 136. QUANDO elevatio poli est incognita, sicque præter tempus verum quoque ipsam poli elevationem investigare debemus, manifestum est, ad hoc duabus observationibus opus esse, vel ejusdem stellæ vel duarum diversarum; unde in hac sectione mihi duæ quæstiones erunt pertractandæ. Altera, quomodo ex observatis ejusdem stellæ duabus altitudinibus cum tempore interea elapso vera hora inveniri debeat; altera verò quomodo ex observatis duarum stellarum altitudinibus vel simul vel successivè, ita ut intervallum temporis sit cognitum, verum tempus sit definiendum.

§. 137. Quamvis hæc problemata insignem habeant utilitatem, tamen iis carere possemus, cùm ipsa poli elevatio non difficulter tam crasso modo uti in sectione præcedente assumsimus, æstimari queat, atque ad id vix opus sit instrumentis. Deinde etiam putaverim nunquam intermittendas esse observationes, ex quibus elevatio poli concludi possit, sicque vix evenire poterit ut quoties stellæ sint conspicuæ, elevatio poli sit ignota; nisi fortè post longam turbidam tempestatem nubes dissipare incipiant, stellasque aliquot transmittant, quo casu neque elevatio poli cognita, neque si satis accuratè æstimari posset, delectus stellarum ad observandum permitteretur.

§. 138. Quod igitur ad prius problema attinet, quo eadem stella bis interjecto quodam temporis intervallo

HANICÆ
isita, perspicuum est
, si stella non longè
m observetur.
item refractiones ni-
hac regione distinctè
gulam inventam pro
esse observandam, &
stella declinationis
, & æquatio *cos. a*
ujus stellæ observan-
nea elevatione poli
qui ex minus accu-
redditur; suprà enim
onem $cos. a = \frac{cos. s}{cos. p}$.
ne poli hoc judicium
d observationem eli-
nim dispiciatur, quà
vari possit, cujus alti-
; tum quæratur *s*, ut
s quæ à zenith inter-
itur una, cujus distan-
stellam diligenter ob-
poris inde deductam
n. Hoc autem modo
n esse arbitror.
VIII.

cognito obſervatur, ſolutio omninò ſimilis erit ei, quam ſuprà pro determinatione temporis ex duabus altitudinibus ſolis ſucceſſivè obſervatis tradidi. Quamquam hoc problema caſu antè allato, quo cœlum plerumque nubibus eſt velatum, nullum uſum habere poteſt, propterea quod ignoramus, quamnam ſtellam poſt aliquot tempus iterùm ſimus viſuri. Tum verò hic modus nimis prolixum calculum requirit, ut equidem mallem alio modo uti, dummodo liceret. Interim tamen ſolutionem hujus problematis, ne ullam quæſtionis partem prætermiſiſſe videar, breviter exponam.

§. 139. Primùm igitur ſtella obſervata vel erit fixa, vel planeta; priori caſu ejus aſcenſio recta, & declinatio manebit invariata; poſteriori verò inquirendum eſt, quantùm utraque intervallo temporis inter obſervationes elapſi ſit mutata, quod ex ephemeridibus facilè colligitur. Deinde etiam ex æſtimatione itineris diſpiciendum eſt, quantùm navis tam longitudo quàm latitudo interea immutetur. Inveſtigetur porro verum temporis momentum, quo ſtella per meridianum alterius loci, quo navis tempore alterutrius obſervationis eſt verſata, tranſeat, unde ſimul ex variatione longitudinis navis & aſcenſionis rectæ ſtellæ, ſi fuerit planeta, verum culminationis tempus ſub altero meridiano patebit.

§. 140. His præparatis, ſit AP diſtantia ſtellæ à polo in
Fig. VIII. prima obſervatione, aP in altera: ac definiatur angulus APa rite, tam ex intervallo temporis, quàm ex mutationibus aſcenſionis rectæ, ſi ſtella fuerit planeta, & longitudinis navis; ſcilicet, tempus inter obſervationes elapſum convertatur in angulum per *pag.* 94. Notitiæ temporum Pariſinæ. Ab eo vel ſubtrahatur, vel addatur variatio aſcenſionis rectæ, prout ea interea vel creſcat vel decreſcat. Mutatio autem longitudinis navis addatur, ſi curſus in

orientem ſit directus
modo habebitur veru
§. 141. Per puncta
culi maximi Aa, & i
lateribus AP, aP,
rantur anguli PAa,
APZ angulus verus
vationis, eritque aP
cundæ obſervationis
ſit perducta, dum varia
eſt incluſa, ſupereſt er
reſpectu arcuum AP
§. 142. Capiatur
nis poli in prima obſe
vationis poli in obſerv
gnita; quo facto erit à
prima obſervatione,
obſervationes dantur.
quam navis interea ſub
que valdè erit parva &
autem hoc intervallun
ciliùs inſtitui queat,
dum inquiram.
§. 143. Incidat erg
in triangulo AZa dar
hinc colligentur angul
venti ſunt anguli PA
ZAP, ZaP, unde
tres res erunt cognitæ
viſſe, in quo ob data
reperientur, 1. Latus
poli. 2. Angulus aPZ
gulus azimuthalis PZ

orientem fit directus, contra verò fubtrahatur, hocque modo habebitur verus angulus ad polum APa.

§. 141. Per puncta A & a ductus concipiatur arcus circuli maximi Aa, & in triangulo fphærico APa, ex datis lateribus AP, aP, cum angulo intercepto APa, quærantur anguli PAa, PaA cum latere Aa. Deinde fit APZ angulus verus horarius pro tempore primæ obfervationis, eritque aPZ angulus horarius pro tempore fecundæ obfervationis quæ ad eundem meridianum $HZPO$ fit perducta, dum variatio longitudinis jam in angulo APa eft inclufa, fupereft ergo ut pofitio hujus meridiani $HZPO$ refpectu arcuum AP & aP definiatur.

§. 142. Capiatur PZ æqualis complemento elevationis poli in prima obfervatione, & Pz complemento elevationis poli in obfervatione altera, etfi utraque eft incognita; quo facto erit arcus ZA diftantia ftellæ à zenith in prima obfervatione, & za in altera; ideoque utraque per obfervationes dantur. Erit ergo Zz variatio latitudinis, quam navis interea fubiit, ideoque cognita, quæ plerumque valdè erit parva & pro nihilo haberi poterit. Primò autem hoc intervallum reverâ rejiciam, quo calculus facilius inftitui queat, & deinceps in errorem inde oriundum inquiram.

§. 143. Incidat ergo z in Z, ut fit $Za = za$, & quia in triangulo AZa dantur fingula latera, AZ, aZ & Aa, hinc colligentur anguli ZAa, ZaA, & quia jam antè inventi funt anguli PAa, PaA, hinc innotefcent anguli ZAP, ZaP, unde in utroque triangulo ZAP, ZaP tres res erunt cognitæ; fufficiet autem alterum ZaP evolviffe, in quo ob data latera aZ, aP cum angulo ZaP reperientur, 1. Latus PZ, complementum elevationis poli. 2. Angulus aPZ, ex eoque angulus APZ. Et 3. angulus azimuthalis PZa.

§. 144. Quod si jam variatio latitudinis Zz alicujus momenti esse videatur, quia invenimus angulum PZa, ei proximè æqualis erit angulus Pza; sufficit autem hunc angulum propemodum tantùm nosse. Ex Z ad za demittatur perpendiculum Zu, positoque angulo $Zzu = \theta$, erit $zu = Zz\,cos.\,\theta$: quo ablato ab aZ remanebit au, cui aZ est æqualis. Jam posito hoc valore aZ loco ejus, quo antè sum usus, calculus in §. præced. præscriptus repetatur, ut tam vera elevatio poli ex PZ & tempus quæsitum ex angulo APZ vel aPZ concludi queat.

§. 145. Angulus, scilicet, APZ hoc modo inventus in tempus convertatur per tab. $p.93$, Not. temp. hocque tempus ad tempus culminationis stellæ sub meridiano primæ observationis addatur, vel ab eo subtrahatur, prout observatio vel post, vel ante ejus culminationem fuerit instituta, sicque habebitur tempus verum solare pro momento primæ observationis; unde facilè angulum APa similiter in tempus convertendo, deducetur verum tempus pro momento posterioris observationis.

§. 146. Patet ergo hoc problema, quod si calculo analytico aggredi velimus, in intricatissimos calculos nos seduceret, sine ulla difficultate, per sola præcepta Trigonometriæ solvi posse, neque solutionem variationibus tam ascensionis rectæ & declinationis stellæ, quàm longitudinis ac latitudinis navis; quæ res alioquin calculum summoperè impedire videantur, quicquam perturbari, ita ut in hoc negotio major calculi sublevatio exspectari quidem possit.

§. 147. Alterum problema, quo tempus ex duabus observationibus duarum stellarum vel simul vel successivè factarum determinare jubemur, maximam sæpe utilitatem habere videtur, quando inter nubes tantùm hinc inde stellæ transparent, tum enim, vel simul vel successivè

m stellarum altitu
eadem stella non a
ferat, neque propterea p
tur. Commodo autem u
maris non difficilior evad
§. 148. Excerptis erg
vamus tam ascensionibus
definiantur earum tempor
sub quo navis tum versatu
tionum satis sit notabile,
quæ in mari evenerit, rat
prà est præceptum, simul
tetur, utrùm ante an post
§. 149. Si ambæ obse
tuantur, tum differentia
gulum ad polum APB,
A, ad observationem ste
terlapsum, tum id in ang
gulum antè inventum AP
tionis longitudinis navis i
quæ ad illum angulum a
feratur, contrà verò ab e
§. 150. Cùm hoc pact
APB fuerit definita, sum
tiæ prioris stellæ à polo,
rioris stellæ à polo, ducat
atque in triangulo sphæri
& BP cum angulo interc
PAB, PBA, cum later
§. 151. Deinde ductus
utrique observationi comm
sive interjecto quodam te
jam est ostensum: sitque

m stellarum altitudines observari poterunt, dum eadem stella non amplius denuò se spectandam offerat, neque propterea priori problemati locus concedatur. Commodo autem usu venit, ut solutio hujus problematis non difficilior evadat quàm præcedentis.

§. 148. Excerptis ergo duarum stellarum, quas observamus tam ascensionibus rectis, quàm declinationibus, definiantur earum tempora culminationis, pro meridiano sub quo navis tum versatur, atque si intervallum observationum satis sit notabile, simul variationis longitudinis, quæ in mari evenerit, ratio habeatur, quemadmodum suprà est præceptum, simul verò in utraque observatione notetur, utrùm ante an post culminationem instituatur.

§. 149. Si ambæ observationes eodem momento instituantur, tum differentia ascensionum rectarum dabit angulum ad polum APB, sin autem ab observatione stellæ A, ad observationem stellæ B, tempus quoddam sit præterlapsum, tum id in angulum convertatur, isque ad angulum antè inventum APB superaddatur, simulque variationis longitudinis navis interea factæ ratio haberi poterit, quæ ad illum angulum addatur, si navis orientem versùs feratur, contrà verò ab eo subtrahatur. *Fig. IX.*

§. 150. Cùm hoc pacto vera quantitas anguli ad polum APB fuerit definita, sumatur arcus AP æqualis distantiæ prioris stellæ à polo; & PB æqualis distantiæ posterioris stellæ à polo; ducaturque arcus circuli maximi AB; atque in triangulo sphærico APB, ex datis lateribus AP & BP cum angulo intercepto APB, supputentur anguli PAB, PBA, cum latere AB.

§. 151. Deinde ductus concipiatur meridianus $HZPO$ utrique observationi communis sive ambæ simul sint factæ, sive interjecto quodam tempore, quod fieri posse suprà jam est ostensum: sitque ZP complementum elevationis poli pro priori obſervatione, zP verò pro poſteriori; ſiquidem latitudo navis inter obſervationes variationem quandam fuerit paſſa. Primâ tamen calculi operatione hoc diſcrimen Zz negligatur; ita ut arcus ZA & ZB repreſentent complementa altitudinum ſtellarum obſervatarum.

§. 152. In triangulo ergo ſphærico AZB cùm data ſint tria latera AB, AZ & BZ, computentur anguli ZAB, ZBA; hincque colligantur anguli ZAP & ZBP, quo facto vel in triangulo ZBP, latera ZB, PB, cum angulo ZBP: unde porrò complementum elevationis poli PZ cum angulis horariis ZPA & ZPB invenientur, ex quibus vera tempora obſervationum rectè concludentur; ſiquidem variatio latitudinis navis, quæ per Zz, exprimitur nullius fuerit momenti, ut plerumque fit, fierique præſtat cum una obſervatione abſoluta nihil obſtat, quo minus ſtatim alteram ſuſcipiamus.

§. 153. Sin tamen nihilominus tempus quoddam notabile inter tempora obſervationum præterfluxerit, atque variatio latitudinis Zz interea facta ſine errore negligi nequeat, tum ſaltem ſuperior calculus azimuthum PZB ſatis prope indicabit, & cùm jam arcus ZB veram diſtantiam ſtellæ B à zenith exhibeat, demiſſo perpendiculo zu, definiri poterit particula Zu, quæ ſecundùm figuram ad ZB addita, dabit veram longitudinem arcùs ZB, quâ in ſuperiori calculo jam repetendo pro ZB uti oportebit.

§. 154. Si igitur ex tribus lateribus trianguli AZB denuò angulus ZAB determinetur, ab eoque angulus PAB ſubtrahatur, ſiquidem figura ad caſum propoſitum ſit accommodata, remanebit angulus ZAP, ex quo & arcubus ZA, PA, reperietur cùm vera quantitas PZ arcus, tùm angulus horarius ZPA, qui debito modo in tempus converſus indicabit quanto tempore obſervatio ſtellæ A vel ante, vel poſt ejus culminationem ſit facta.

§. 155. Supereſſet ut quo
certitudinem obſervationum
jicerem; ſed quoniam ſi co
conceditur, methodis in ſu
uti conveniet; pauca tantùm
ſuprà traditis facilè conſequ
ſtellas non procul ſupra hori
perſpicuum eſt, quæ declin
ſed exiguam; ſiquidem navi
ſetur. Deinde concluſio erit
in aſcenſione recta diſcrep
conſilium erit, ut altera ſtell
altera prope occidentem eli

§. 155. Supereſſet ut quoque de ſelectione ſtellarum ad certitudinem obſervationum maximè idonearum plura adjicerem ; ſed quoniam ſi cœlum eſt ſerenum, & delectus conceditur, methodis in ſuperiori ſectione traditis potiùs uti conveniet ; pauca tantùm annotabo, quæ ex præceptis ſuprà traditis facilè conſequuntur. Primùm ergo ad hoc ſtellas non procul ſupra horizontem elevatas eligi debere perſpicuum eſt, quæ declinationem habeant borealem, ſed exiguam ; ſiquidem navis in hemiſphærio boreali verſetur. Deinde concluſio erit eo certior quò magis ſtellæ in aſcenſione recta diſcrepent. Quamobrem tutiſſimum conſilium erit, ut altera ſtella prope horizontem orientem, altera prope occidentem eligatur.

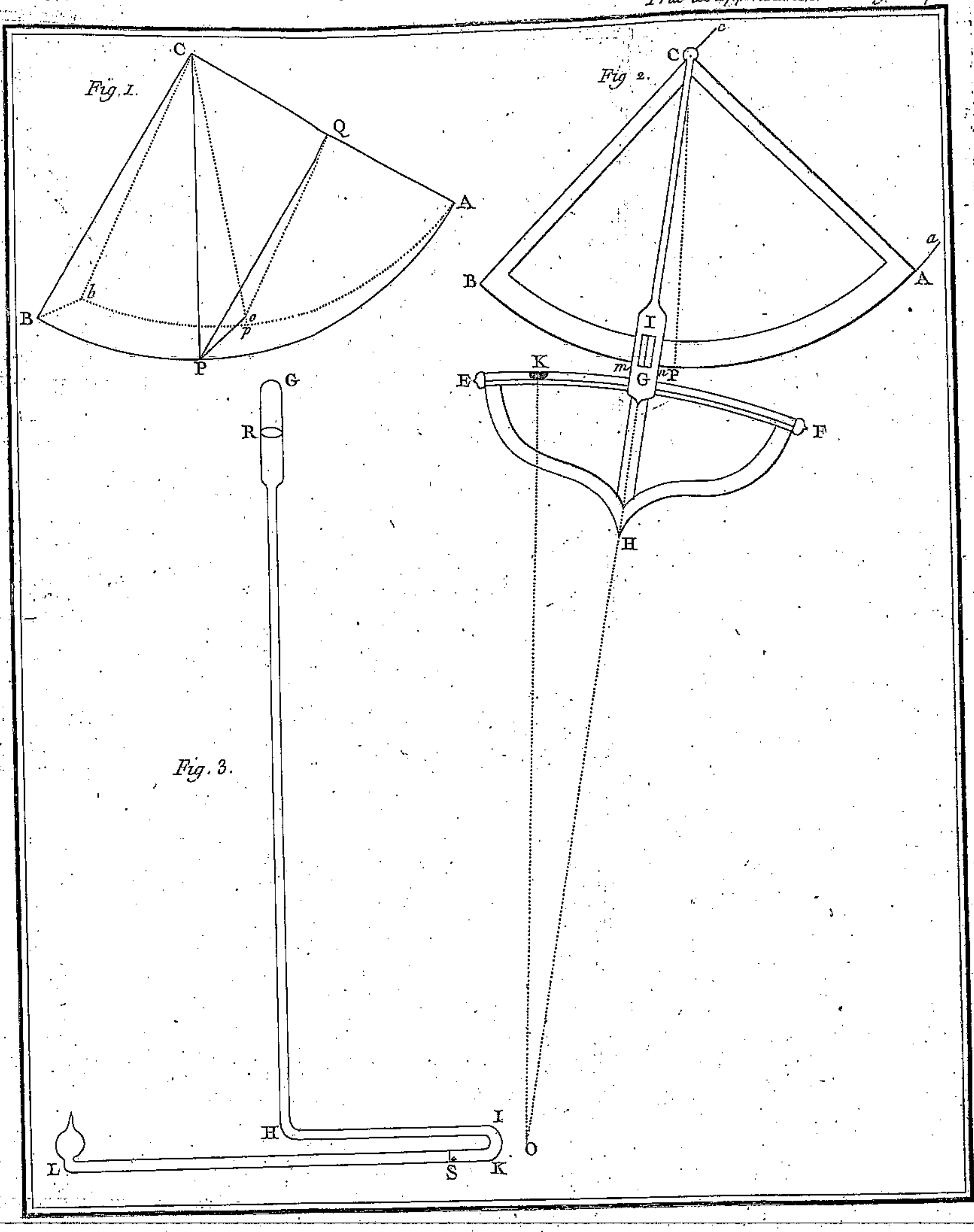
Fig. 1.
C
Q
A
B
b
o
p
P
Fig 2.
c
C
a
A
B
I
K
m
G
n
P
E
F
H
O
G
R
Fig. 3.
H
I
L
S
K

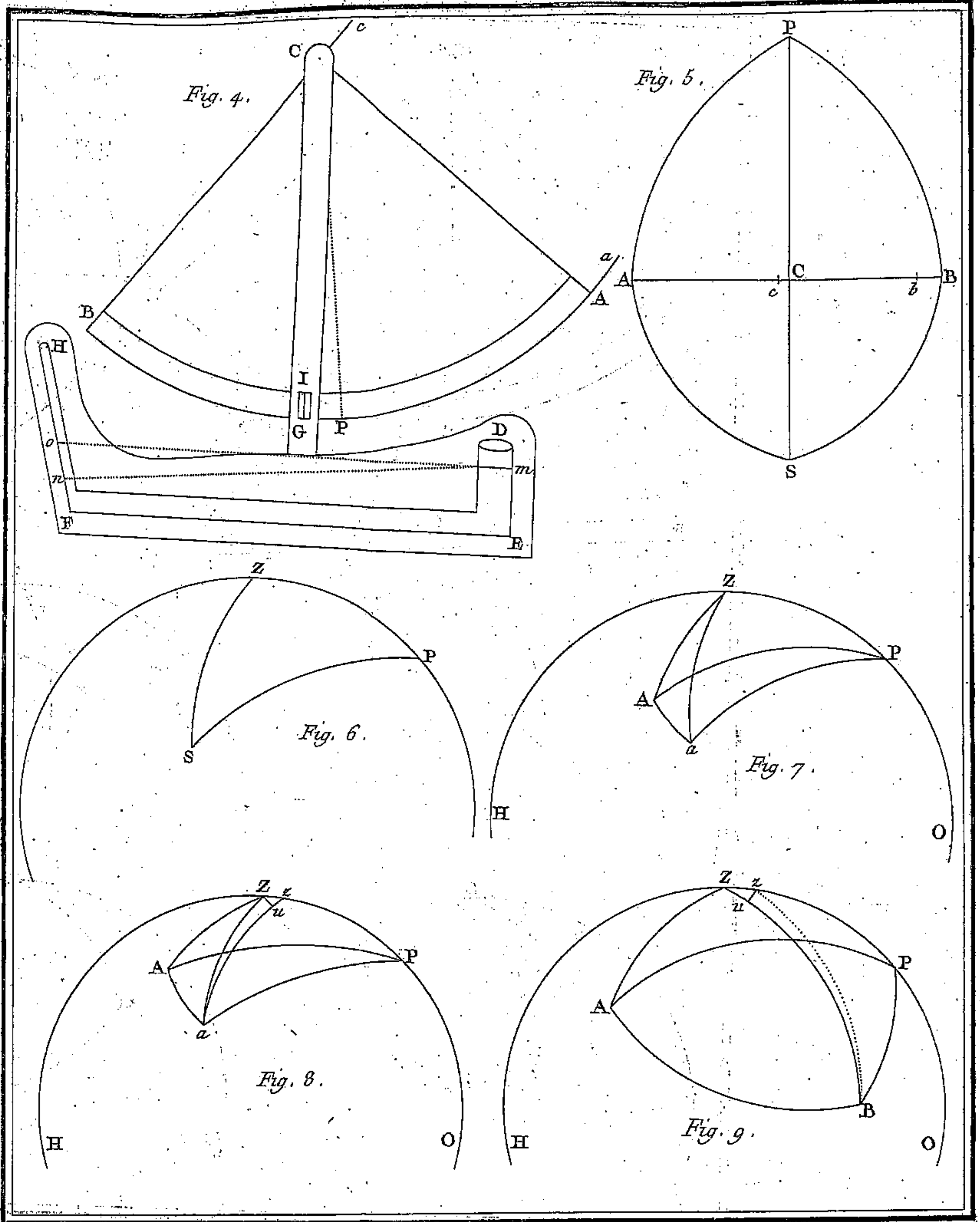
Fig. 4.
C
c
B
A
a
H
I
G
P
D
o
n
m
F
E
Fig. 5.
P
A
C
c
b
B
S
Z
P
S
Fig. 6.
H
Z
P
A
a
Fig. 7.
O
Z
z
u
A
P
a
Fig. 8.
H
O
Z
z
u
P
A
B
Fig. 9.
H
O